

Don. Lud.

559



~~2463.~~ L. 22.

Don. Lud. 559.

Mathematik

Mathematik

Verlag von Julius Springer

Einzig möglicher Standpunkt
reiner Original-Ideen
einer
Anfangs-Theorie
der
Mathematik

in
Ergänzungen, Erklärungen
und
Theils-Systemen,
mit Figuren
und einer fast vollständigen Arithmetik.

In einer Nebenstunde dem Forscher gewidmet

von
Joseph Huhn.

München
bey Joseph Zängl Stadtbuchdrucker 1801.

Der Speculant ist an der Quelle der Wissenschaft, und im Besitze des Stoffes einer Wissenschaft hat er einen Standpunkt, und daher sein System Vollständigkeit und Ordnung: der Nicht-Speculant hat die Kopie seiner Wissenschaft, und lebt in einem Labirinthe, in welchem ihm so mancher Zutritt, so mancher Lichtblick verborgen bleibt — da dem Speculanten alle Materie seines Systems zu Gebote steht! — Der Speculant erzeugt die Wissenschaft, der Nicht-Speculant ist sein Schüler, und besitzt höchstens Originalität in einem planlosen, also auch unvollständigen Versetzen der wissenschaftlichen Stoffe! — —

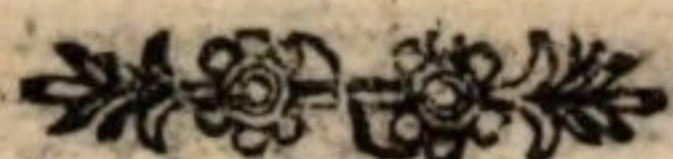


I n h a l t.

- 1.) Höchsten Grundbegriffe, und auf diese sich beziehende Grundsätze der Mathematik.
 - 2.) Grundbegriffe, und von diesen ausgehenden Beweise der sogenannten geometrischen Axiomen — der graden Linie, der Zirkellinie, des Winkelmaßes; neue Lehrsätze, oder neue Beweise über Parallellinien, meist bey ihrer Durchschneidung durch eine grade Linie; ebenso über die Gleichheit der Dreyecke, die Durchschneidung grader Linien; ein Skizze des Zusammenhanges geometrischer Lehrsätze und Beweise; Erklärungen Einfacher Figurenberechnungen.
 - 3.) Theorie des Rechnens; nebst einigen neuen Principien der Proportionslehre.
-

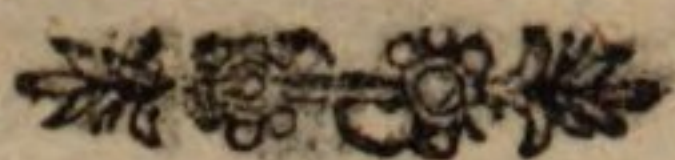
Erinnerung.

Die Zweckmäßigkeit, Figuren in einer Tafel zu vereinigen, laßt sich erklären 1) weil ohnehin oft eine, die Figuren betreffende Erklärung sich über mehrere Seiten ausdehnt, wobey man also doch die im Texte angebrachte Figur aus dem Gesichte verlore, da es doch schöner, und im Drucke leichter und profitabler ist, und auch der Text mehr Schönheit hat; 2) es ist vorzüglich interessant, die Wissenschaft gleichsam in einem Abdrucke vor sich zu haben, eben so manche Figurenbeziehungen; — aber der Hauptgrund fällt in dieser Schrift weg;



weg ; weil Figuren hierin nur Nebensachen find ; weil sich das Wenige, was davon gesagt wird , meist auf derselben Seite sagen läßt ; weil sie sich in den Beweisen nicht aufeinander beziehen ; und weil ich überzeugt bin, den Leser , der in dieser Schrift meistens mit Begriffen zu thun hat, mit Verwebung der Figur in den Text zu befriedigen. — — Die Kritiken, welche ich einigemal beyfüge, treffen — meist Unterbergers Lehrbuch ; — Dafs Wissenschaft (reine und angewandte Mathematik) noch Dienerin des Mechanisms und nur Nebengeschäft in einem Stande ist, — der am ergiebigsten an Zeit, Ruhe, Gelegenheit und Unterstützung seyn sollte , obgleich man mehr oder weniger gleichsam ein wissenschaftliches Bestreben äußert — beweist, dafs man sich noch nicht einmal die Fragen

gen



gen aufgeworfen hat : *Was ist militärische Bildung (in Beziehung auf den Staat) ? — Worinn besteht die militärische Tauglichkeit eines Subjects ? — (die Beantwortung dieser 2 Fragen giebt zugleich den Unterschied eines civilistischen und Militärkarakters an) — Welches sind die erforderlichen Eigenschaften der verschiedenartigen Stufenglieder eines Militärpersonal ? — und als Folge der Beantwortung dieser 3 Fragen, Welches ist das beste Militärsystem? — — Doch ist auch so manches andere noch nicht beantwortet ! — als z. B. eine Wissenschaftliche , also psychologische , physiologische , anthropologische , physiognomische Charakteristik deutscher und anderer Nationen ! — Die in meiner in der Oberdeutschen L. Z. vom 30ten Sept. 1800 angezeigten Schrift , — Die Stabilität des „Arztes durch den Begriff des Lebens &c.: „nebst*



„nebst beygefügter Beantwortung einer
„Göttingischen Rezension über meine
„Metaphysik des Rechts und der Pflicht“
versprochene medizinische Abhandlung
kann wegen seitherigen Umständen
erst später erfolgen. —

Geschrieben zu Ende Augusts
1801.

Ver-

Verbefferung, und Druckfehler.

Pag. 5 Lit. c.) ist durch Uebereilung (denn ich widerspreche mir pag. 62 in b) aa)) als der letzte Zusatz zur Schrift fehlerhaft geworden; statt dessen lese man — Wenn ungleiche Gröſſen um gleichviel größer oder kleiner werden, bleibt ihr arithmetisches, nicht ihr geometrisches Verhältniß, und dieſs wird ſo geändert, daß die kleinere größer wird; aber durch gleichoftmaliges Setzen, also durch Multiplication mit ungleichen Gröſſen bleibt ihr geometrisches, zwar nicht ihr arithmetisches Verhältniß, und dieſs wird ſo geändert, daß die größere größer wird: dieſe Veränderung hat auch ſtatt bey Potenz-Erhöhung, wobey aber auch kein geometrisches Verhältniß bleibt; — dieſs auf die Theorie der Brüche angewandt &c. — — — — — unächte aber größer werden; es bleibt zwar bey der Multiplication, aber nicht bey der Addition und &c: — — — — —

Pag. 12 Z. 4 lese man — errichteten der halben Grundlinie gleichen Perpendicularerlinie. — Zusatz zum Begriff des Zirkels: die ganze Division paßt auch auf ein Oval, Elipse; nur ist hier nicht die errichtete Perpendicularerlinie von gleicher Länge mit der halben Grundlinie.

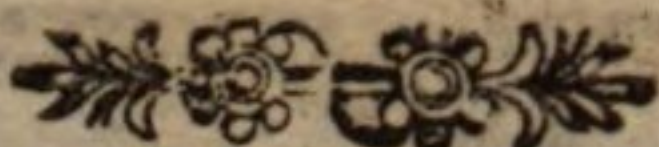
Pag. 16 Z. 13 lese man ſtatt wie gewöhnlich — nur. Pag. 13 Z. 14 lese — In den Pag. 11, Anmerkung Z. 6. gehört (nach Punkts. Pag. 14 Z. 16 — Zähle ſtatt Zahle. Pag. 5. Z. 23 daß ſtatt das P. 15 Z. 4 ſoll zwischen Hälfte Theilungspunkt kein Gleichheits - ſondern ein Zusammenhangs-Zeichen ſtehen; eben ſo Pag. 11 Z. 13. Pag. 9. Z. 4 dieſem ſtatt dieſen; Pag. 7 Z. 9 des ſtatt den; Pag. 13 Z. 23 a c ſtatt a ^c; Pag. 12 Z. 5. l̄erlinie ſtatt l̄arelinie: Pag. 13 Z. 1 einer ſtatt ciner; Pag. 16 Z. 11 l̄erlinie ſtatt l̄xrlinie. p. 59 Z. 1 Cubus ſtatt culns. p. 57 ſtatt 58; Z. 17 derten; p. 64 Z. 161 Bruch.



I. Abschnitt.

Metaphysischen und andere höchsten Grundbegriffe der Mathematik.

Die Kategorien der *Einheit* und *Vielheit* gelten auch hier als Urbegriffe; — ersterer giebt einen Zug im Begriffe der *Grösse*, letzterer kömmt im Begriffe der *Zahl* vor. — Um sich aber die Begriffe der *Grösse* und *Zahl* vollständig erklären zu können, wird eine Reflexion über den Begriff der *Gränze* supponirt, welcher diesen Begriffen das erste wesentliche Merkmal ertheilt, und welche also in Hinsicht dieses Grundmerkmals, vereint in jenem Begriffe analitisch liegen; da aber *Grænze* als wechselseitige Grundursache 1) eines Endes und Anfanges — im Raume, 2) eines Vergehens und Entstehens — in der Zeit; im ersten Falle den Begriff der *Grösse*,



im andern den der *Zahl* begründet, so ist *Grösse* *) jede Gränze als Eigenschaft eines einzigen Dinges, d. i. als einseitige Charakteristik, und *Zahl* jede Gränze als beiderseitige Charakteristik, d. i. als Eigenschaft verschiedener, also zweyer oder mehrerer, d. i. vieler Dinge. — Aus dem Begriffe der *Grösse* folgt, 1) dafs jede *Grösse* eine Einheit ist, und 2) dafs jede Einheit eine Gränze hat. — Aus dem Begriffe der *Zahl* ergiebt sich, 1) dafs 2 die geringste *Zahl* ist, und 2) mit Hinsicht des Begriffes der *Grösse* — dafs, da der jederseitige Inhalt in mathematischer Hinsicht kein anderer als eine Einheit ist, die Einheit also das Maas der *Zahl*

ist

*) Die gewöhnliche *Definizion* „Größen sind „alle Dinge, welche durch hinzuthun oder hinwegnehmen grösser oder kleiner werden“ enthält den Begriff des Rechnens, und supponirt den Begriff der *Grösse*, des Ganzen, und der Theile. — Eine andere *Definizion* - *Grösse* seye die Eigenschaft eines Dinges, so nicht anders, als „durch Hilfe eines andern, womit es in Vergleichung gesetzt wird, deutlich erkannt werden kann“ vermischt den ursprünglichen Begriff der *Grösse* mit dem *secundären*, nemlich mit den grössern, kleinern, und gleichen *Größen*, und zudem setzt der Begriff deutlich noch einen undeutlichen Begriff der *Grösse* an die Seite, welches also vermöge der untergeordneten *Definitionen* — überdiess noch eine Gattungs - *Definizion* der *Grösse* erheischte! — — — Der oben aufgestellte Begriff der *Grösse* widerspricht auch einer Kantischen primären Originalität und Categorität desselben.



ist. — Zählen heisst die Gränzen verschiedener, also auch mehrerer Dinge vereinigen, d. i. Einheiten vereinigen. — Vermöge der Anwendung des Begriffs der Zahl erfolgt folgende Hinsicht und Schluss; — da hinsichtlich der physischen Eigenschaften der Dinge nur ihre Aehnlichkeit eine *Affinität*, also auch die meiste Gränze verursacht, so ist der Begriff der Zahl für die Begriffe der Art und Gattung *usurpirt*.

Postulat eines bestimmten Raumes und einer bestimmten Zeit ist — ein anderer, oder mehrere bestimmte Räume und Zeiten; denn 1) beym Begriffe der Grösse wird nothwendig auch das angränzende Ding gedacht; 2) Raum und Zeit sind unendlich, — 1. Folge - Grundsatz: da also jeder Theil des Raumes von anderen Theilen umgeben ist, so zeigt der eine Gränztheil die *Länge*; — der andere, also aufser diesem liegende (weil ein Ding — der in die Länge gränzende Theil nicht zugleich seyn, und nicht seyn, also ein anderer Theil — der in die Breite gränzende — an seiner Stelle seyn kann) — die *Breite*, — der untere oder obere Gränztheil die *Dicke* — *Tiefe* oder *Höhe* an. — 2. Folge - Grundsatz: Die Vergrößerung jeder Linie, Fläche, jedes Körpers ist vorstellbar; und wird z. B. weiter unten bey Errichtung einer *Perpendicularer* - Linie vorgestellt.

Ein Ganzes ist die Grösse als Vereinigung der Grössen in ihr selbst, d. i. der Theile. — *Continu-*

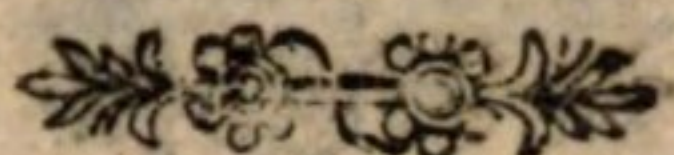


um, *Stet* ist ein Ganzes, dessen Theile so zusammenhängen, daß jedes Theils Ende der Anfang des andern ist, das also hinsichtlich der physischen Eigenschaften, keine ungleichartigen Zwischen-theile hat. *Zusammensetzung* — ein *Aggregat*, eine *unstete Grösse* ist die Vereinigung nicht *continuirender*, d. i. durch Zwischendinge getrennter Dinge; — Der Begriff der Zusammensetzung liegt in der Natur, — der Begriff des absoluten Continuuums gründet sich auf die bloße reine Anschauung — des Raumes und der Zeit (d. i. des Aufeinander- und Nacheinanderseyns) denn z. B. des gediegenste Gold hat ungleichartige Zwischenräume, und ist doch bekanntlich der dichteste Körper; — So kann auch eine Linie mathematisch continuirlich, ohne physisch zusammenhängend zu seyn; — Eben dies gilt von der Fläche und dem Körper. —

Maas ist eine gleiche Abtheilung eines Ganzen; — *Gleich* ist, was denselben Raum oder dieselbe Zeit erfüllt, — was dieselben Zahlen begreift.

Positive Grösse ist eine gesetzte, eine *negative*, eine aufgehobene.

*) Beym Begriff der *Gränze* kömmt zu bemerken, daß die Wirkung jedesmaliger Grundursache auf Empfindung, *Veränderung* — die Grundursache selbst aber in dieser Hinsicht ein Natur - Gegenstand ist.



II. Abschnitt.

Folge - Sätze, — als erste Grundsätze der Mathematik.

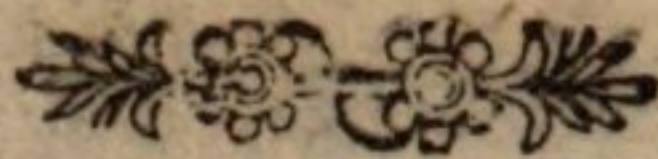
1) Aus dem obigen angewandten Begriffe der Zahl erfolgt.

a) Dafs nur gleichartiges, *addirt*, *subtrahirt*, *multiplicirt* und *dividirt* werden kann.

2) Auf den Begriff des Verhältnisses der Grössen gründen sich folgende 3 *Principien*.

b) Wenn eine 3te Grösse (oder Zahl) eine und dieselbe Eigenschaft zweyer andern besitzt, so sind auch diese 2 andern in Hinsicht dieser Eigenschaft einander gleich; — dieß gilt also auch, wenn 2 Grössen durch eine 3te *multiplicirt*, *dividirt*, oder um sie gröfser oder kleiner werden.

c) Wenn ungleiche Grössen um gleich viel gröfser oder kleiner werden, bleibt ihr Verhältnifs, aber durch gleich oftmaliges Setzen, also entweder durch *Multiplication* mit ungleichen Grössen, oder durch Potenz - Erhöhung wird das Verhältnifs ungleicher Grössen so geändert, dafs die gröfsere gröfser wird; — dieß auf die Theorie der Brüche angewandt lehrt, das ächte Brüche bey Potenz - Erhöhung (d. i. ihrer



ihrer Zähler und Nenner) kleiner, unächte aber gröfser werden, und eben so bey der Multiplication; Es bleibt zwar bey Addition und Subtraction gleicher Gröfsen Zähler und Nenner, also der Werth des Bruchs ungeändert; — daher $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{12}$, aber $\frac{2}{3} + 4 = \frac{6}{7}$.

d) Wenn von 2 gleichen Dingen jedes eine Gröfsen-Eigenschaft eines von 2 andern verschiedenen erhält, so erhalten sie auch gegen einander dieselbe Verschiedenheit der 2 andern.

3) Der Begriff des Ganzen und der Theile begründet folgende 3 Grundfätze.

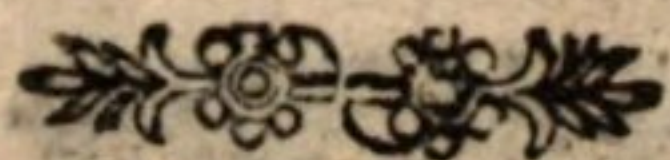
e) Ein Ganzes kann einem andern gleich seyn, ohne dafs die beyderseitigen Theile gleich sind z. B. $6 + 5 = 3 + 6 + 2$.

f) Das Ganze ist gleich seinen Theilen, und gröfser als einer oder einige seiner Theile, — aus diesem folgt in ersterer Hinsicht:

g) Es ist gleich viel, ob man mit derselben Gröfse das Ganze, oder seine Theile multiplicirt oder dividirt, oder gleiches zum Ganzen, oder seinen Theilen addirt, oder von einem oder dem andern subtrahirt.

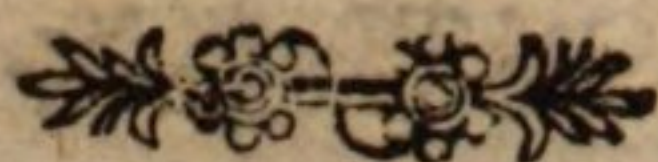
4) Auf den Begriff des Maafes beziehen sich folgende 2 Prinzipien.

h) Es



h) Es kann etwas als Ganzes Einheit, und als gemessenes oder getheiltes zugleich Zahl seyn.

i) Ein Ganzes kann nur durch ein gleichartiges, — also entweder durch einen Theil des Ganzen, welcher also eine Einheit oder eine Zahl ist, — oder durch ein kleineres Ganze derselben Art gemessen, d. i. dividirt werden; denn wie könnte vermöge der Definizion des Maases ein ungleichartiges ein Theil des Ganzen, des Zumessenden seyn? —



III. Abschnitt.

Erklärung und Grundbegriffe der Vorstellungsart der Raumsgränzen bey mehreren, als den obenangegebenen einfachsten Raumstheilen; nebst den dadurch begründeten Grundsätzen, und überhaupt Erklärung und Beweise der sogenannten geometrischen Axiomen — der graden Linie, der Zirkellinie, des Winkelmaases; nebst neuen Lehrsätzen, oder Beweisen der Parallellinien; und überhaupt bey Durchschneidung grader Linien, nebst neuen Beweisen der Grundsätze der Gleichheit der Dreyecke.

Linie ist die Lage der Theile eines continuirlichen räumlichen Ganzen, deren jeder Theil von 2 andern begränzt wird, ausser den 2 Endtheilen, welche nur an einen gränzen.

- a) *Grade Linie* ist eine solche, deren Theile in der bloßen Ansicht des ersten Theils einander decken, aber nicht in anderer Ansicht; hierbey ist zwar jeder vorstellbare letzte Theil auch als erster zu betrachten.



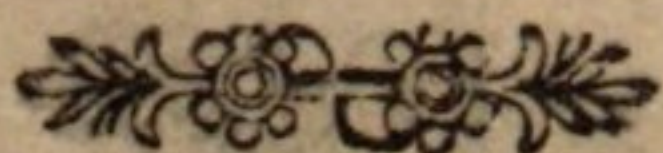
Folge - Grund - und Lehrfätze.*)

1ter. Grundsatz:

Eine gerade Linie wird durch 2 Theile bestimmt; denn da bey diesen Standpunkte ein Theil den andern, der 1te den 2ten und dieser den 3ten deckt; da ferner wechselseitig der 3te 1ter und der 1te 3ter Theil seyn kann, so muß jeder, sowohl der 1te als auch der 3te Theil den 2ten als den mittlern decken; nun aber läßt sich durch den mittlern Theil sowohl eine Zahl von Theilen (also die ganze Länge einer graden Linie, ihre Endtheile abgerechnet) als auch ein einziger Theil vorstellen; also ist eine Linie grad, wenn die beyden Endpunkte einander decken; also ist eine grade Linie durch 2 Theile bestimmt. — Dafs dies der Fall seye, wenn die Linie nur aus 2 Theilen bestünde, liegt analitisch im Postulatsbegriffe der Lage der 2 Theile.

2ter

*) Woher der allgemeine sich gleichsam als angebohren erweisende wissenschaftliche Unmuth einer scheinbaren Paradoxie des Problems einer Erklärung, oder eines Beweises dieser Sätze —! —



2ter Grundsatz :

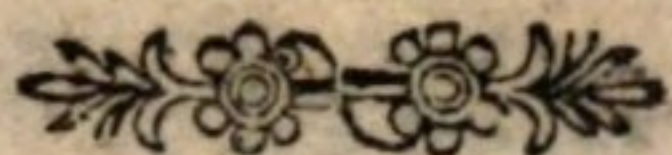
Da aber auch die 2 *Endtheile* einer geraden Linie nicht einen *Mitteltheil* decken können, der nur an einen Theil, und nicht an 2 Theile der Linie gränzt, so gehört dieser Theil auch nicht zur graden Linie, sondern wenn er mit den 2 *Endtheilen* der graden Linie in Verbindung steht, zu einer *krummen*.

3ter Grundsatz :

Weil nun ein *Mitteltheil*, so wie ein Ding überhaupt nicht zugleich seyn, und nicht seyn kann, so kann also auch kein anderer *Mitteltheil* an seiner Stelle seyn, also kann zwischen 2 *Endtheilen* nur derselbe *Mitteltheil* oder dieselbe Zahl der *Mitteltheile* sich befinden, d. i. *Zwischen 2 Endtheilen ist nur eine grade Linie möglich.*

4ter Grundsatz, und ein Axiom.

Dass ein zwischen denselben 2 *Endtheilen* einer graden Linie liegender Theil einer *Krummen*, wenn er die kleinste krumme Linie ist, nur an einen *Mitteltheil* der graden gränze — ist vorhin gesagt: hieraus folgt aber auch, wegen dem Zusammenhange der Theile der krummen Linie, dass genannter *Mitteltheil* an 2 *Mitteltheile* angränze, welche nicht in der
gra-



graden Linie liegen: und alle übrigen Zwischentheile liegen auch außer der graden Linie, weil ein solcher nebst einem Endpunkte eine grade Linie bestimmen würde, also haben die grade und krumme Linie zwischen denselben Endpunkten ein verschiedenes Maas: — daß aber das Maas der graden Linie kleiner sey, beweist die Anschauung, und ist also ein *Axiom*.

b. *Krumm* *) ist die Linie deren Theile in der bloßen Ansicht des iten Theils nicht einander decken. — Sie ist verschiedenartig.

Zir-

*) Beym Begriffe der krummen Linie: — „sie ist eine solche, die in allen ihren Punkten von ihrer Richtung abweicht“ fragt sich, was ist *Richtung* (diese ist die Bestimmung der Lage eines Punkts eines Kleinsten Theils) durch die Lage zweyer andern) — und — wird hierbey nicht auch der Begriff der graden Linie *supponirt*, da doch die Begriffe der graden und krummen Linie eben so unabhängig voneinander, als verschieden sind? — — Ein bekanntes mathematisches Lehrbuch *supponirt* ein Längern Maas, oder einen Beweis der Längen = Verschiedenheit der Graden und Krummen Linie zwischen denselben 2 gegebenen Punkten: denn der *Autor* sagt „eine grade Linie ist die Kürzeste, eine Krumme — die nicht - kürzeste zwischen 2 Punkten“ — Wie aber, wenn die einen Endpunkte der graden und krummen Linie oder beyde in jeder verschieden sind? — oder, wenn man den Beweis der Längenverschiedenheit nicht wüßte? — oder



Zirkellinie ist eine vom Ende einer graden Grundlinie anfangende — Continuirlich fortschreitende — in Hinsicht einer auf den Mittelpunkt der Grundlinie errichteten *Perpendiculære*-Linie 3mal ihre Richtung ändernde, und daher sich zuletzt selbst schließende krumme Linie; — In ihrer 2ten Richtung entfernt sie sich in eben dem Verhältnisse von den Zwischenpunkten oder dem Entpunkte der Perpendicularerlinie (also nicht vom Anfangspunkte derselben in der Grundlinie) und nähert sich in eben dem Verhältnisse dem andern Ende der Grundlinie, so wie sie sich in der 1ten Richtung den Zwischenpunkten, oder den Endpunkten der Perpendicularerlinie nähert, und sich vom 1ten Endpunkte der Grundlinie entfernt; die 3te Richtung entfernt sich in eben dem Verhältnisse vom 2ten Endpunkte, &c. die 2te Richtung nähert sich wieder in dem Verhältnisse dem 1ten: — bey der 3ten und 4ten Richtung denkt man sich die Perpendicularerlinie auf der andern Seite bis zum entgegengesetzten Punkte der Zirkellinie verlängert. —

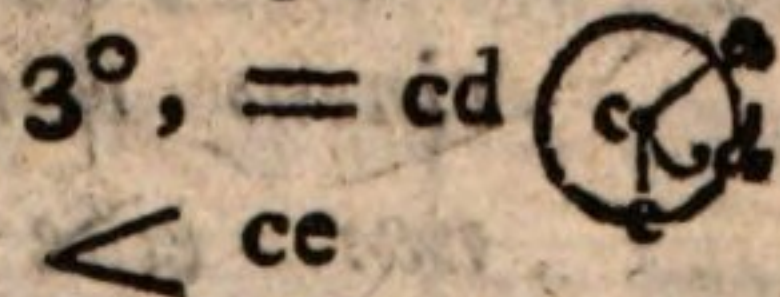
Grad

oder keine (war jedem von früher Kindheit eigene) Fertigkeit im Maassenvergleich hätte? — — —



Grad ist das angenommene Maas einer Zirkellinie, von einem in ihr liegenden Punkte an, bis zur Wiedererreichung desselben.

Nach der angegebenen Definizion erklärt sich der vollständige Begriff des Zirkels, der eigentlichen Zirkelfläche, denn die Perpendicularlinien, in wie ferne sie von jedem Punkte des Diameter nach jedem correspondirenden Punkte der Peripherie laufen, bezeichnen auch in ihrem Laufe, jeden Flächenpunkt; da hingegen die gewöhnliche Definizion „Zirkel ist eine krumme Linie, die in allen ihren Punkten vom ihrem Mittelpunkte gleichweit absteht“ bloß die Peripherie darstellt. — Zu dem gewöhnlichen genetischen Begriff der Zirkellinie „sie entsteht, wenn sich eine Linie um ihren festen Punkt bewegt, bis sie wieder in ihre vorige Lage kömmt“ muß der Begriff einer graden sich vorwärts bewegenden Linie aufgenommen werden. — Weil aber der Endpunkt derselben Linie die Zirkellinie beschreibt, so muß er überall gleichweit von dem andern Endpunkte abstehen: denn widrigenfalls würde die Linie nicht gleich lang, oder Krumm. Z. B. $^a c f e y e =$



A.) Verschiedenheit grader Linien durch Winkelerzeugung, nebst speciellen Principien.

aa) Perpendicularer oder schief ist eine Linie, deren Anfangstheil an einen Theil einer



ner Grundlinie gränzt, und deren jeder folgende Theil sich immer mehr von letzterer entfernt; die Linie ersterer Art entfernt sich in gleichen Distanzen von den jederseitigen gleichnamigen Theilen der Grundlinie, — die schiefe entfernt sich von ihrem Anfangspunkte so, daß die von einem ihrer Theile auf die Grundlinie gesenkte Perpendicularerlinie um so größer wird, je mehr sich die schiefe Linie von ihrem Anfangspunkte entfernt, d. i. je länger sie wird. —

Vermöge der Definizion der Perpendicularerlinie ist richtig.

a) Mit Hinsicht des Axioms — jeder Hälfte-
Theilungspunkt ist einzig — man messe,
oder zahle von was immer für einem Aus-
sentheile eines Ganzen bis zu dessen Mittel-
punkte, und von da bis zum entgegenge-
setzten Aussentheile, aber jeder einmalige
ungrade Theilungspunkt ist zweyfach ver-
möge der zweyfachen Aussentheile: — daß
auf einen Punkt in einer Linie, oder von
einem Punkte ausser einer Linie auf diese
nur eine senkrechte Linie möglich ist *)
denn da die Linie senkrecht ist, wenn je-
der ihrer Theile von jedem jederseitigen
der Grundlinie gleichweit abstehet, so ist
im ersten Falle die Sache schon offenbar,

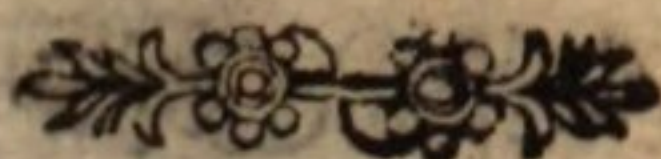
weil



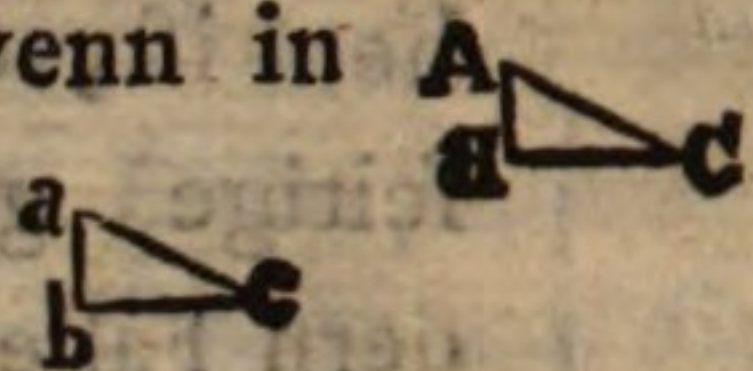
weil der Anfangspunkt der Perpendicularen in der Grundlinie als von je 2 gleichnamigen abstehend, zugleich auch als Hälfte = Theilungspunkt einer Linie anzusehen ist, deren Endpunkte genannte beyderseitige gleichnamige Punkte sind; im andern Falle erklärt sich als Folge des ersten und eben auch aus dem Begriffe der Perpendicularenlinie, weil jeder Theil derselben — der untere, wie der obere, und wechselseitig — von je 2 gleichnamigen der Grundlinie gleichweit absteht;

b.) Um zu beweisen, dass die senkrechte $d c$ die kürzeste Linie vom Punkte d , auf die Linie $a b$, also kleiner als jede andere schiefe $d b$ feye, so folgert man: wenn $f c = d c$, und beyde perpendicular auf $a b$ sind, so sind d und f gleichweit von a und b entfernt, weil c gleichweit von a und b als 2 gleichnamigen Theilen entfernt ist, nun aber ist $d b + b f > f d$, also auch $d b > d c$. — Da nun eine Entfernung sowohl durch eine absolut bestimmte, als auch durch die kürzeste Linie ausgedrückt wird, so ist diese eine grade und zwar eine Perpendicularenlinie bey der Distanz eines Punkts von einer graden Linie.

*) Nun aber wird ein rechter Winkel durch eine senkrechte Linie gegeben, also sind alle rechte Winkel einander gleich. Aus

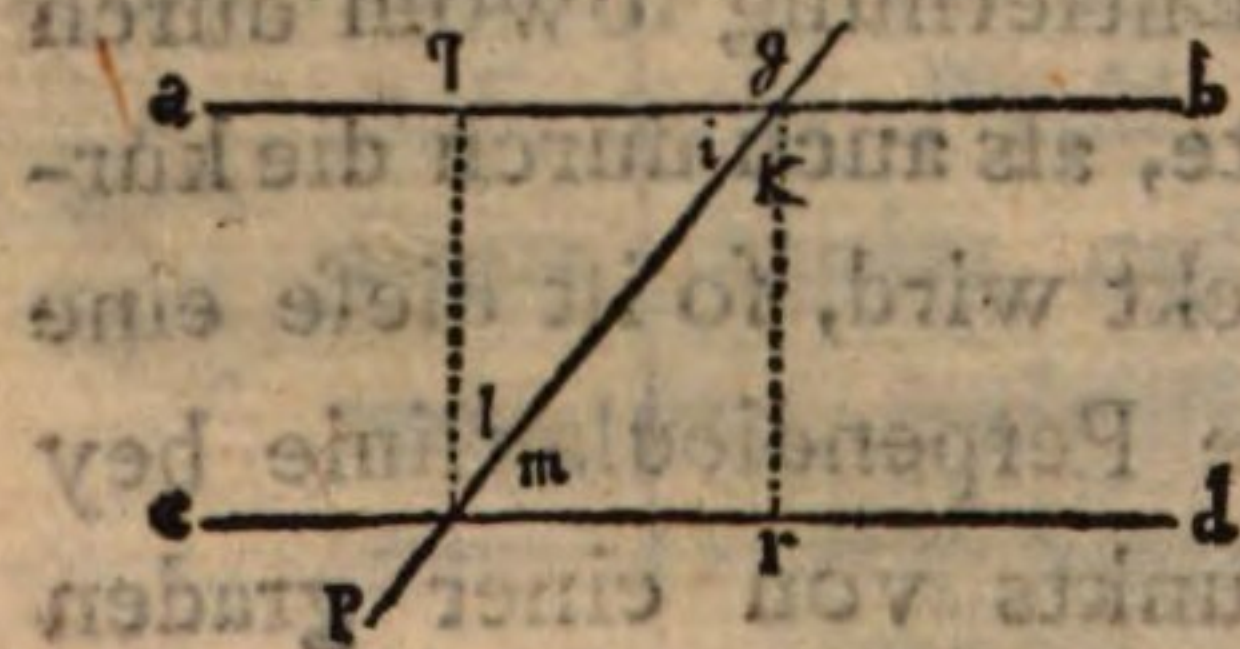


Aus dem Begriffe der *Perpendicularerlinie* erfolgt, daß zur Bestimmung der Gleichheit rechtwincklichter $\triangle$ die Gleichheit der *Perpendicularerlinien* und die Gleichheit einer der zwey andern *Linien* hinreichend sind; denn wenn in $\triangle a b c$ *perpendicularer* auf $b c$



und die beyden a von c , oder die beyden b von c gleichweit entfernt sind, so sind im 1ten Falle auch die Anfangspunkte in der Linie b , und im andern Falle die Endpunkte der *Perpendicularerlinie* a gleichweit von demselben Punkte c entfernt; — es ist also klar, daß sich der Lehrsatz, nicht wie gewöhnlich auf die Gleichheit der *Hypothenuse* nebst gleicher *Perpendicularerlinie* einschränke, sondern sich auch statt der Gleichheit der *Hypothenuse* auf die Gleichheit der Linie $b c$ beziehe; es kann aber auch $b c$ eben so die *Perpendicularerlinie* auf $a b$ vorstellen. Aus genanntem Grundsätze mit *Construction* der *Perpendicularerlinien* auf die Winkelpunkte erfolgt, die Gleichheit der *Wechselwinkel* zwischen *Parallel-*

linien $i = m$ in den $\triangle q g p, g p r$; denn $g p = g p, q p = r g$, ferner weil $i + k = 180^\circ$, und $l + m = 180^\circ$, so ist auch $k = l$, und so ist obiges *Princip* Erklärungsgrund aller Lehrsätze durchschnittener *Parallel-*

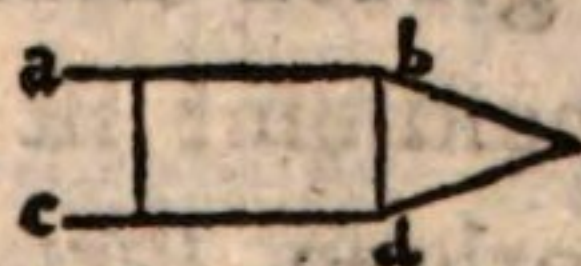




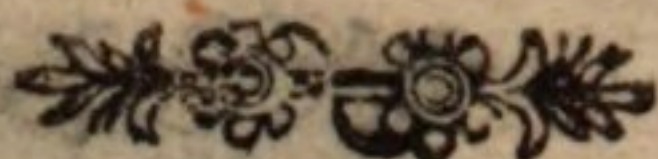
bb) *Parallellinien* sind unzusammenhängende Linien, deren einer je gleichnamiger Theile (der 1te, 2te &c.) von den gleichnamigen der andern gleichweit abstehen; (es gibt auch *parallele* Zirkelkreise, Zylinder - Durchschnitte. Die

eine feye nun Grundlinie, so stehet ein Theil der andern *a* von seinem gleichnamigen der Grundlinie *d* so weit ab, als je 2 seiner beyderseitigen Nebentheile *f b* von 2 gleichnamigen Nebentheilen jener *e c*; Da nun sowohl er selbst, als sein gleichnamiger Theil von was immer für einem seiner gleichnamigen jederseitigen Nebentheile auch gleichweit absteht, so addirt man jederseits die 1te und 2te Distanz genannter Nebentheile, d. i. einerseits die Distanz *b a* und *b c*, und erhält also auch eine gleiche Distanz jenes Theils *a* der andern Linie von was immer für gleichnamigen Theilen der Grundlinie — hier einerseits *c*, anderseits *e*, d. i. gleiche Perpendicularerlinien bestimmen die Distanzen der gleichnamigen Theile der *Parallellinien*; —

Diese Gleichheit der Perpendicularerlinien erfolgt auch aus dem Begriffe, und der Anschaulichkeit der *Parallellinien*, denn in



wäre *b d* $\angle$ *a d*, aber auch, *ab* und *cd* nicht *parallel*.

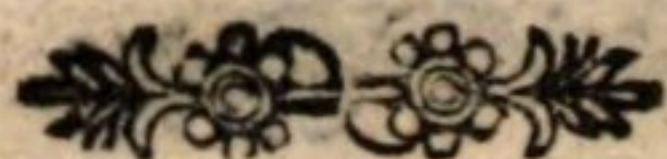


2. Eine Perpendicularerlinie zwischen Parallellinien ist sowohl auf die eine, als auf die andere perpendicular, denn würde ihr anderer Endpunkt von jeden gleichnamigen Theilen der andern Linie nicht gleichweit entfernt seyn, so widerspräche sich, vermöge des Beweises des 1ten Grundsatzes der Parallellinien selbst der Begriff der Parallellinien, denn $d c + b c$ ist auch $= d e + e f$, so wie es oben von $a b + b c = a f + f e$ erwiesen ward.

3ter Grund- und Lehrsatz.

Die Perpendicularerlinien sind wechselseitig Parallellinien, und die vorherigen Parallellen Perpendicularerlinien: denn die Endpunkte der vorherigen Perpendicularerlinien stehen von einem und demselben Zwischen - Mittelpunkte jederseits, und beyderseits gleichweit ab, also b und f sowohl von a als c und e von d , also stehen sie auch gleichweit von sich selbst ab, d. i. $b a + a f = c d + d e$, also auch je ihre gleichnamigen Zwischentheile (weil durch die Punkte f, b die Lage der einen graden Linie, und durch e, c die der andern bestimmt ist) — ferner da jeder Theil der vorigen Perpendicularerlinie — die also auf jede Parallellinie perpendicular ist — von jedem gleichnamigen Theile der beyderseitigen

gen



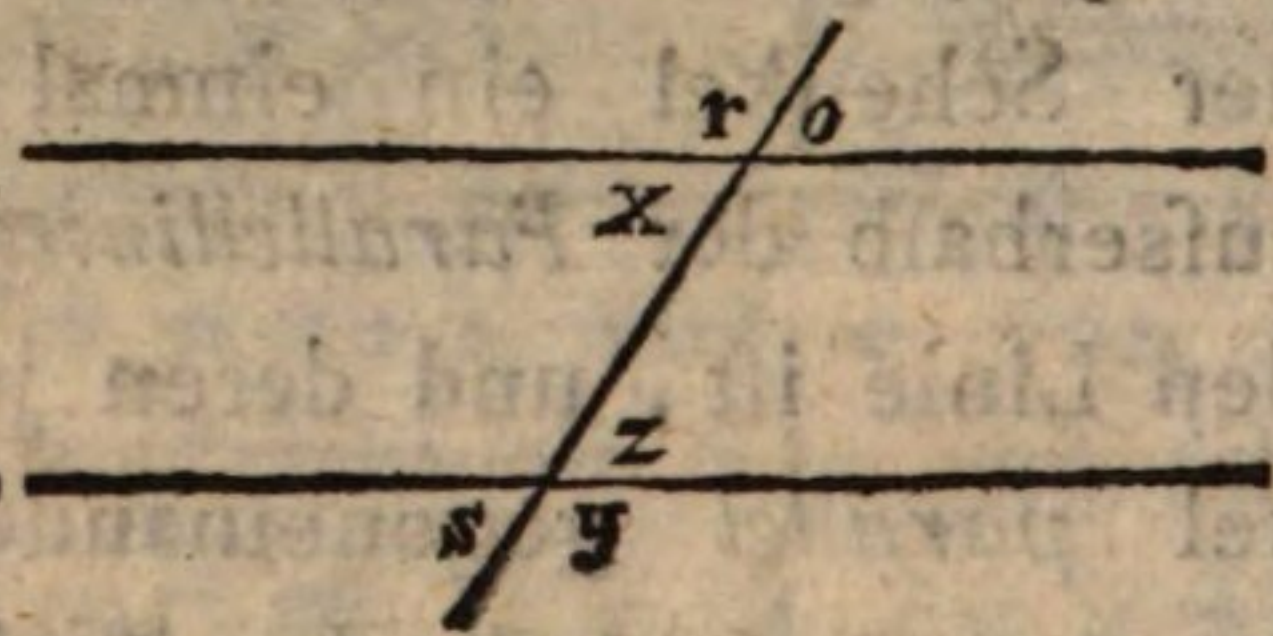
gen *Parallellinien* gleichweit entfernt ist, so sind in Hinsicht eben dieser Theile diese *Parallellinien* gleichweit entfernt von denselben Theilen je solcher beyderseitiger 2 *Perpendicularen*, d. i. sie sind selbst *Perpendicularen* zwischen den vorigen; es ist also, weil der Punkt g gleichweit entfernt ist von a und d — auch a und d gleichweit von g entfernt, und eben so d von h an der verlängerten $b c$.

Ferner :

Werden 2 *Parallellinien* von einer 3ten *graden Linie* durchschnitten, so ist durch die 2 Durchschnittpunkte die Lage der *graden Linie*, ihre Richtung bestimmt; wenn man nun die 2 Durchschnittpunkte als 2 verschiedene Scheitelpunkte zweyer Winkel betrachtet, deren jedesmaliger einer Schenkel ein einmal innerhalb, und einmal außerhalb der *Parallellinien* liegender Theil der *graden Linie* ist, und deren jedesmaliger 2ter Schenkel *parallel* gegeneinander sind, so geben also, wegen Gleichheit der Richtung und Lage jederseitiger Schenkeln, auch jede mögliche Durchkreuzungspunkte, sie mögen einerseits näher, andererseits entfernter seyn, gleiche Winkel (vermöge des weiter unten folgenden Beweises des Satzes, daß ein Winkel, er mag durch einen nähern oder entfernten Zirkel gemessen werden,



gleichviele Grade hat) ; also sind die äußere Winkel der Parallellinien den innern entgegengesetzten auf derselben Seite der durchschneidenden Linie gleich, denn wäre dieß nicht, so müßte eine Linie der den beyderseitigen Schenkeln gemeinschaftlichen 2 Linien ihre Richtung verändern, also wären entweder keine Parallellinien, oder es wäre keine grade Durchschnittslinie da, sondern entweder 2 grade zusammengesetzte, oder eine krumme: und in jedem Falle wäre es gegen die Voraussetzung; — und wechselseitig beweist die Gleichheit genannter Winkel — 1ten, daß eine grade Linie die Parallellen durchschneidet, und 2ten die Parallelität dieser Linien. — Da nun jede grade Linie von unbestimmter Länge als ein Diameter irgend eines Zirkels betrachtet werden kann, und jede auf dieser Linie um einen Centralpunkt angenommene Winkelsumme 180° zu ihrem Maasse hat, so haben in der Fig. die Winkel $o + r$ sowohl, als $x + r$ 180° , also ist $o +$



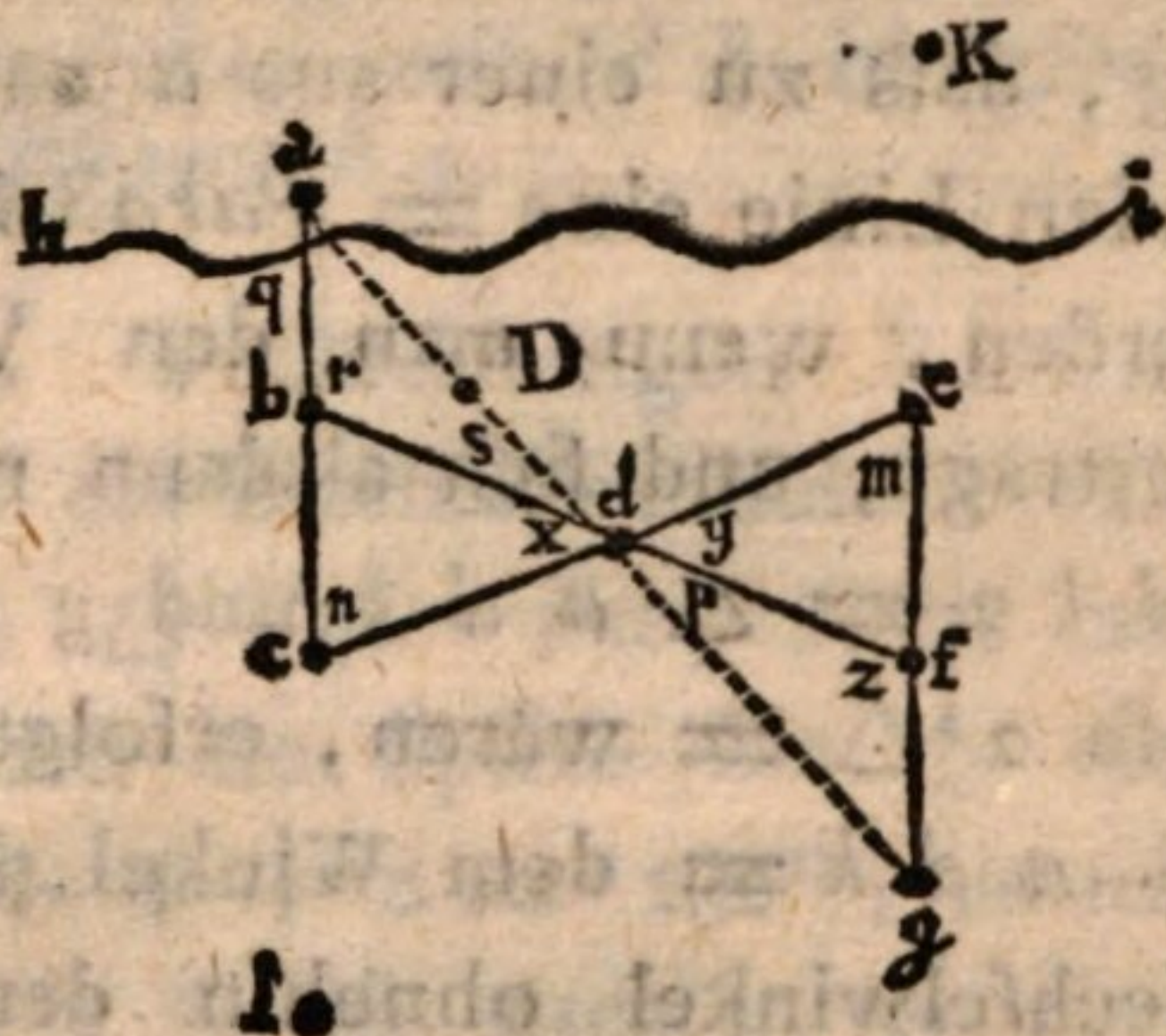
$r = x + r$, also $o = x$; da dieß nun auch andererseits anwendbar ist, so folgt aus obigem Grundsätze der Gleichheit der äußern und entgegengesetzten innern Winkel, daß $x = z$, und also jede solche Winkel (welche Wechselwinkel heißen) einander gleich sind (o und x heißen Scheitelwinkel) — Also sind Wechselwinkel zwischen Paral-

lellen

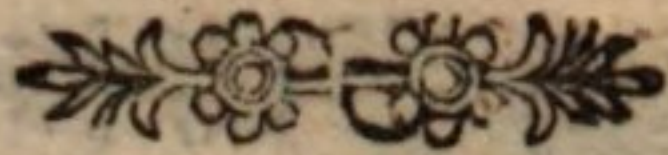


tellinien einander gleich, und wechselseitig — gleiche Wechselwinkel beweisen Parallellinien. — Erster Satz ist z. B. in folgender Aufgabe angewandt, — Es seye eine ungangbare Distanz zu messen, z. B. des Gegenstandes a über dem Fluß $h i$, so nimmt man einen willkürlichen Punkt b , dann einen willkür-

lichen c in der Richtung $b a$, und wieder einen willkürlichen d , überträgt $b d$ in $d f$, und $c d$ in $d e$, so sind die Winkel x und y



und die Seiten $c d$ und $d e$, $b d$ und $d f$ in den Dreyeken gleich; verlängert man nun die Linie $e f$ in g , d. i. in den Punkt, der in grader Linie mit d und a liegt, so sind in den $\triangle a d b$ und $f d g$ die Winkel s und p als Scheitelwinkel gleich, auch $b d$ und $d f$, r und z aber als Wechselwinkel zwischen Parallellinien; denn dafs $a c$ und $e g$ parallel sind, folgt, weil wenn, die vorherigen gleichen $\triangle$ auf einander liegen, also $d e$ auf $c d$, alsdann auch der Winkel n auf m liegt, ihn deckt, also ihm gleich ist: da nun diese 2 Wechselwinkel an der graden $c e$ zwischen $a c$ und $e g$ sind, so sind $a c$ und $e g$, also auch ihre Theile $a b$ und $f g$ parallel, also die Gleichheit der 2 ersten $\triangle$ folgte aus der Gleichheit 2er Seiten, und eines dazwi-



dazwischen liegenden Winkels, die Gleichheit der 2 andern aus der Gleichheit zweyer Winkel an einer gleichen Grundlinie; also ist $f g = a b$ die *Distanz* des Punktes b von a , man *subtrahire* also die *Distanz* $b q$, so erhält man $a q$. — — Aus der Gleichheit der $\triangle a b d$ und $f d g$ erfolgt ferner, da $a d = d g$, daß zu einer aus a nach dem Punkte k laufenden Linie eine $=$ *Parallele* $g l$ könne gezogen werden, wenn man den Winkel $d a k$ in $d g l$ überträgt, und sich alsdann noch durch eine Linie $k d l 2 = \triangle a d k$ und $g d l$ bildet; denn daß diese 2 $\triangle =$ wären, erfolgt, weil, da der Winkel $a d k =$ dem Winkel $d g l$, der übertragene Wechselwinkel ohnehin dem gegebenen gleich, und die zu beyden Winkeln gehörigen Seiten $a d$ und $d g$ einander $=$ sind; — eine *Parallele* aber, die nicht gleiche Gröfse hätte, wäre schon durch den übertragenen Winkel gegeben; — der Winkel $d a k$ aber wird erhalten durch die Vorstellungsart eines $\triangle a d k$ in welchem $a d$, und eben so nach gefundener *Distanz* des Punktes k wie vorhin des a^*), auch $d k$ und der Winkel $a d k$ bekannt wäre, also auch das $\triangle a d k$: — Oder man erhält den Winkel $d a k$ oder zugleich auch schon die $=$ *Parallele* $a k$, wenn man sich 3 Linien $a k$, $D k$ (wobey D willkührlich ist) und $d k$ (die rückwärts visiert in einer graden Linie liegen) vorstellt; denn alsdann sind die Winkel $a d k$ und $k D d$ bekannt, und auch die Seite $D d$, also auch die Seite $d k$ daher ist auch das $\triangle a d k$ be-



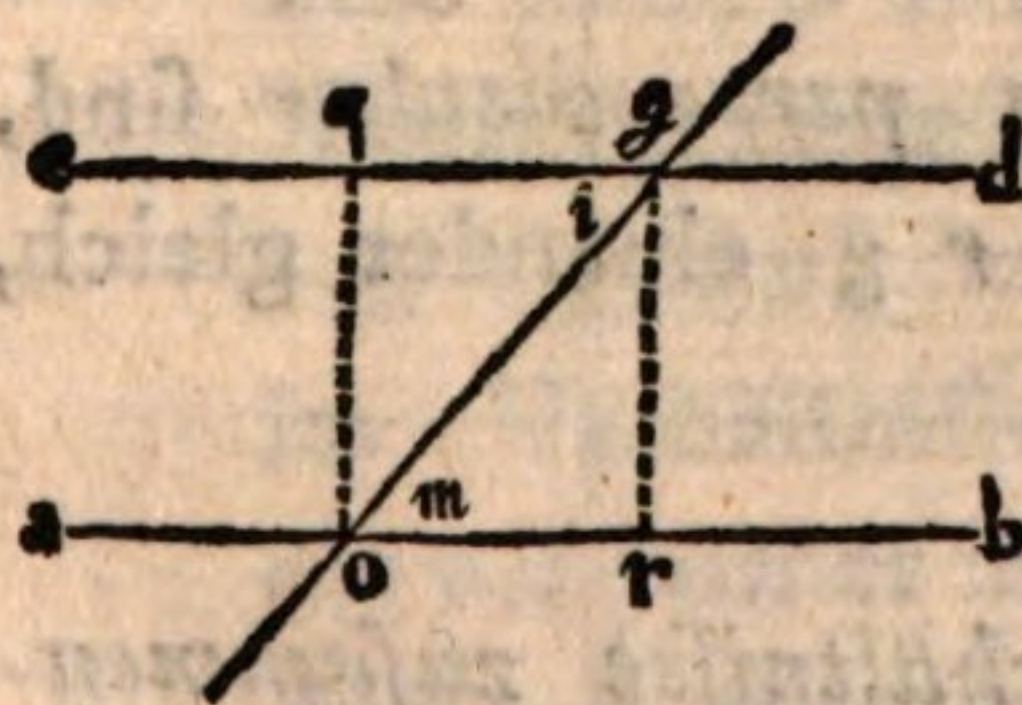
bekannt, weil $a d$, $d k$ und der Winkel $a d k$ bekannt sind, also —; oder man macht ein $\triangle d e k$, da man nun die Winkel d und e , und die Seite $d e$ hat, so hat man auch $d k$.

*) Wenn aber k mit $e f g$ in grader Linie liegt, so gibt schon die verlängerte $a c$ von c in l als den Punkt, welcher mit $d k$ in grader Linie liegt, die Distanz $k e$.

Anwendung eines wechselseitigen Schlusses aus der Parallelität auf die Wechselwinkel: — Um zu beweisen, dass ein $\triangle 180^\circ$ hat, ziehe man mit der Grundlinie durch die Spitze des $\triangle$ eine Parallellinie, so ist $o + x + z = 180^\circ$, da nun $y = z$, $r = o$, $x = x$ so ist auch $y + r + x = 180^\circ$.

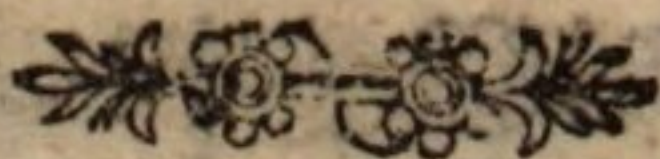


Princip eines Gegebenseyns der Parallellinien durch Errichtung zweyer Perpendicularerlinien innerhalb zweyer graden Linien, — Man errichte



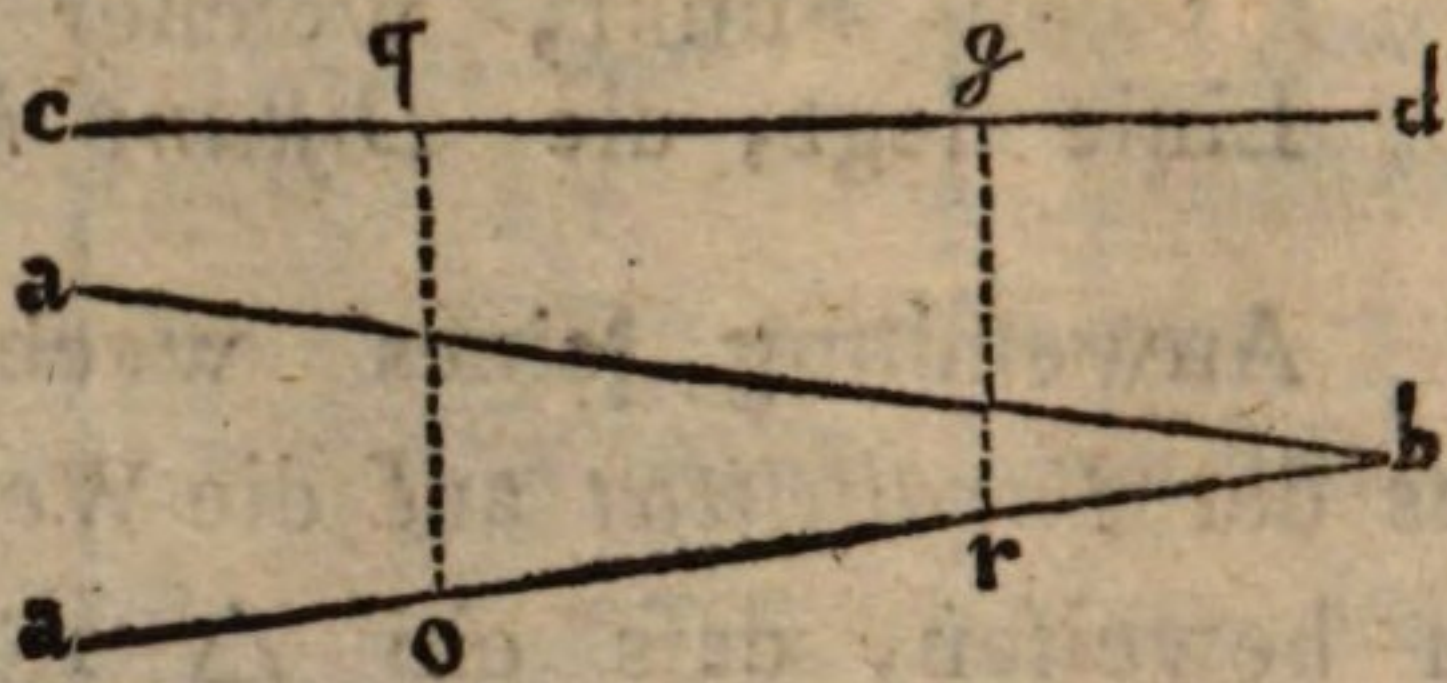
auf $a b$ die senkrechte $g r$, auf $c d$ die senkrechte $o q$, so entstehen die rechten Winkel r und q , nun aber ist $a b$ eine grade Linie, also hat auch jeder Theil derselben

sein proportionirtes Entfernungsverhältniß von g , eben so jeder Theil der $c d$ von o , und im ersten Falle jeder Theil der $g r$ von jedem gleichnamigen der $a b$, im andern jeder Theil der $o q$ von jedem



jedem gleichnamigen der $c d$; da nun aber der Endpunkt g der Perpendicularerlinie $g r$ mit dem Anfangspunkte q der Perpendicularerlinie $o q$, und eben so r mit o in grader Linie liegt, so ist $c d$ mit $a b$ parallel, denn im Gegentheile wäre z. B. o von q weiter oder weniger entfernt als r von g , z. B. Fig. —

alsdann wäre aber jedenfalls $r g$ nicht perpendicular auf $a b$ und im ersten Falle neigte sich $r g$ mehr nach b , im 2ten mehr nach a ; —

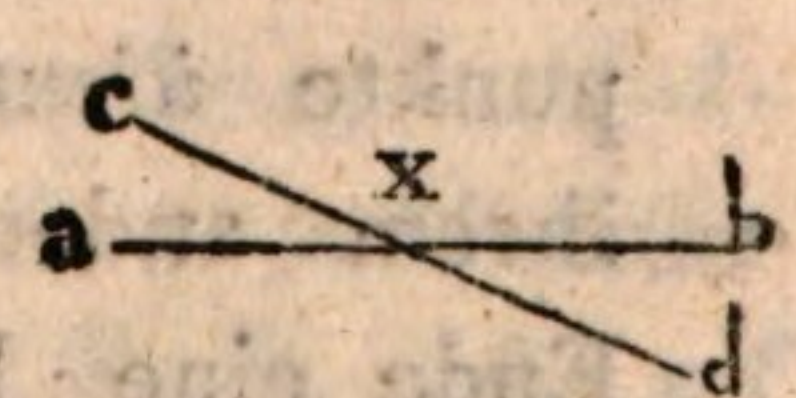


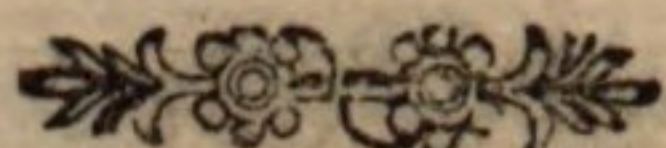
Die Parallelität aus obigen Supposito beweist sich auch, weil q und r als Winkel an der senkrechten — rechte sind, $g o$ aber dem $\triangle o g q$ wie dem $\triangle o g r$ gemein ist, also g und o als Vereinigungspunkte der 3 Seiten in 2 $\triangle$ gegeben sind, und aufeinander liegen, die Linie $g q$ aber und $o r$ perpendicular auf $q o$, und $g r$, oder diese wechselseitig auf jenen perpendicular sind, o sind die $\triangle o g q$ und $\triangle o r g$ einander gleich, also $i = m$, also:

a) Grundsätze aus dem Verhältnisse zusammenfließender, und sich durchschneidender grader 4 Linien.

2 Gra-



Zwey grade Linien ohne Parallelität stoßen in ihrer Verlängerung zusammen, und weiterhin entfernen sie sich wieder in eben dem Verhältnisse, in dem sie sich vorher einander näherten; denn jeder folgende Theil einer Linie nähert sich immer mehr seinem gleichnamigen — Es seye einseitig, oder wechselseitig — bis endlich die gleichnamigen Punkte zusammenstoßen; die verlängerten Linien aber müssen von diesem Punkte anderseits sich wieder entfernen; denn wäre ihre Verlängerung an demselben Punkte, so könnte ein Ding zugleich seyn, und nicht seyn, daß sie aber nicht wieder zu den vorigen vor den Zusammenstoßungspunkt fallen, folgt, erstens aus dem Begriffe der Verlängerung der graden Linie, und zum Theile auch daraus, weil die Verlängerung auf die Anfangsline fallen, also beyde eine und dieselbe Linie bilden würden, da insbesondere auch die Verlängerung eines Raums aufeinander ist; daß aber die Verlängerungslinien auf die Anfangslinien fallen würden, erfolgt, weil $x d$ von $a x$ sich im Verhältnisse entfernt, wie sich der $a x$ die $c x$ vorher näherte: Denn so wie jeder Theil der $c x$ eine gewisse Distanz von x behauptet, so hat  dieselbe Distanz von x jeder gleichnamige Theil der $x d$, da nun wegen Gradheit der $a b$, also derselben Richtung
aller



aller ihrer Theile jede gleichnamigen Theile der $c x$ und $x d$ von jedem Theile der $a b$ eine proportionirliche Entfernung haben, so bestehet aber die *Proportionalität* der einen Entfernung, und der andern Annäherung. — Betrachtet man die mit der Annäherung der $c x$ an $a x$ gleich fortschreitende Entfernung der $x d$ von $x b$, so erklärt man sich die Gleichheit der Scheitelwinkel,

B. Principien für die Zirkellinie :

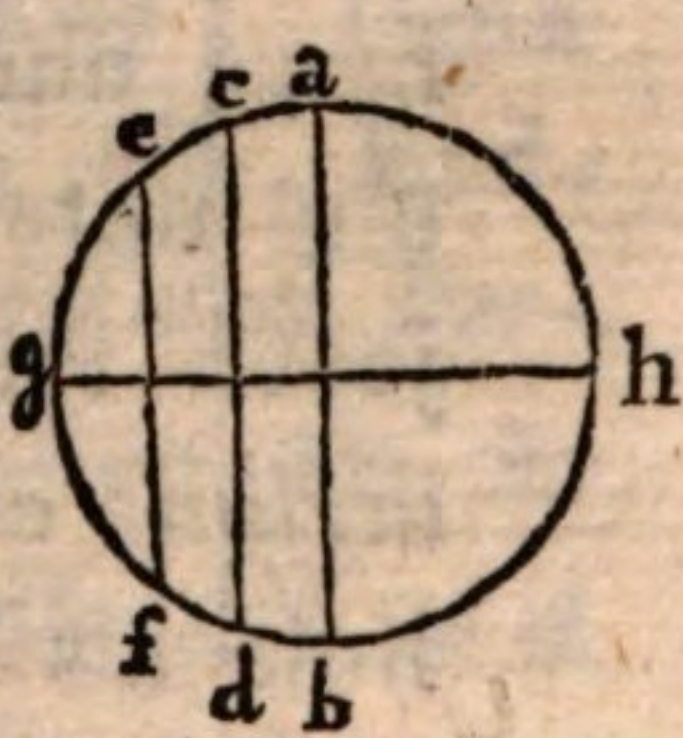
Grundsätze :

- 1.) *Wenn die Kreise gleich sind, so sind auch die Radien und Durchmesser einander gleich ; und*
- 2.) *Wechselfeitig sind bey gleichen Radien und Durchmessern die Kreise gleich.*

Erklärung.

1. Da eine auf den Mittelpunkt einer graden noch einmal so grossen Grundlinie errichtete *Perpendicularerlinie*, deren ein mit einem Zwischen- theile der Grundlinie, nemlich den Mittelpunkte *identisches* Ende unbeweglich ist, mit ihrem andern von der Grundlinie entfernten Ende eine krumme Linie beschreibt, welche als vollendet sich selbst schliesst, so muss sie anfangs, ehe sie auf die Grundlinie stösst, sich

sich dieser immer mehr nähern, also ist eine *Perpendicularerlinie*, welche die immer nähere *Distanz* misst, kleiner als die ersterrichtete *Perpendicularerlinie*, der *Radius*, welche die weiteste *Distanz* misst; überträgt man nun diese Vorstellungsart auch auf die andere Seite der Grundlinie, so entstehet eine Zusammensetzung von *Perpendicularerlinien*, deren jede dem Endpunkte der Grundlinie sich nähernde kleiner als die ersterrichtete (der *Diameter*) ist: Da nun die Endpunkte der Grundlinie *g* und *h* wechseln können, also auch der Theil *a h* an die Stelle des *g a*, und *g b* an die Stelle des *b h* kömmt, so gilt genannte Erklärung auch von diesen Theilen, also vom Ganzen; — also hieraus, und aus dem Satze, zwischen denselben 2 Endpunk-



ten ist nur eine grade Linie möglich, folgt — dass es nur ein *Perpendicularer - Diameter* giebt; liegt also der *Perpendicularer - Diameter* eines Zirkels auf dem gleichen *perpendiculareren Diameter* eines andern, so deckt auch aus demselben Grunde, weil jede grösser oder kleiner ist als die andere, jede zusammengesetzte kleinere und den beyderseitigen Endpunkten der Grundlinie *g h* sich annähernde gleichnamige *Perpendicularerlinie*. Z. B. *c d*, *e f* die andere, — und dieß also sowohl auf der einen, als auf der entgegengesetzten Seite der Grund-



Grundlinie; also auch — da alle aufserhalb der Grundlinie liegende Endpunkte dieser bis zur kleinsten (welche *Perpendicularerlinie* jederseits nur einen Punkt über den Endpunkt der Grundlinie hinausreicht, also an ihn gränzt) — in eine Lage fallen, welche sich als eine continuirliche krumme Linie darstellt, so decken diese krumme Linien, d. i. die halben Zirkeln, also auch die *Ganzen* Zirkellinien, und die Zirkelflächen einander und wechselseitig —

- 2) Wenn sich diese decken, so läßt sich durch den Mittelpunkt eine *horizontallinie* *g h* ziehen, und auf diese als Grundlinie von oben und unten auf jeden Punkt derselben, und aus jeden Punkte der *Peripherie* eine *Perpendicularerlinie* errichten, welche also — da die Grundlinie als durch den Mittelpunkt gehend, also aus 2 Radien zusammengesetzt in beyden gleich ist, also auch gleichviele Anfangspunkte von *Perpendicularerlinien*, und auch wegen Gleichheit der *Peripherie* gleichviele Endpunkte derselben hat — so muß also jede solche *Perpendicularerlinie* des einen Zirkels, jede andere gleichweit vom Mittelpunkte des Zirkels, oder den Endpunkten der *Peripherie* abstehende decken, also muß auch die Vereinigung der aus dem *Centrum* beyderseits errichteten *Perpendicularerlinien* d. i., die *Diameter* einander decken. —

Dafs

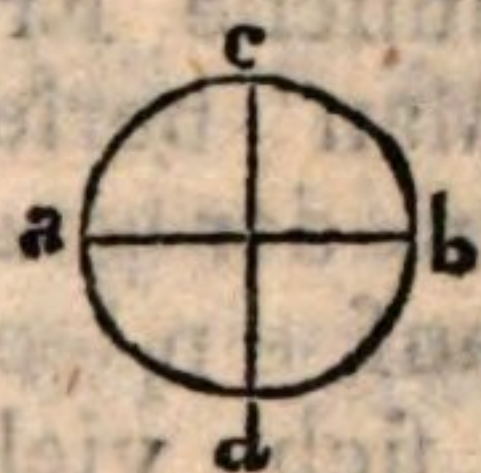


Dass durch einen *Diameter* die Zirkelfläche und die *Peripherie* in 2 = Theile getheilt wird, erfolgt blos aus der vorhin angegebenen *Definition* der Zirkellinie, durch jederseitige Zusammensetzung einer Annäherung, und einer Entfernung von der *Perpendicularærlinie* *a b*



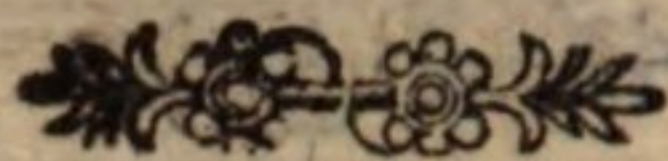
Oder auch: aus dem Begriffe der Zirkellinie in Hinsicht ihrer zu beyden Seiten des *Diameters* liegende Theile erfolgt, dass diese 2 Theile einander gleich sind, dass also der Zirkel durch den *Diameter* in 2 = Theile getheilet werde; Denn

zwischen *a* und *d* treffen die Endpunkte der auf der *a b* errichteten *Perpendicularærlinie* in keiner Linie als in der *a d* zusammen, weil nur die Theile der *a d* gleichweit vom Mittelpunkt des Zirkels abstehen, und dieß gilt von jeder der drey andern Richtungen der *Peripherie*.



Genannte *Perpendicularærlinien* heißen die *Sinus*; je größer nun der Bogen eines Winkels ist, der weniger als 90° hat, je größer ist auch dessen *Sinus*, *Sinus versus*, *Tangens* und *Secans*, denn die Gröfse des Bogens hängt ab von der Gröfse der *Peripherie*, und durch diese ist die Gröfse der Grade, bestimmt, von dieser aber hängt ab die Gröfse der *Perpendicularærlinie*, welche auf den *Diameter* erreicht mit ihrem Endpunkte

in



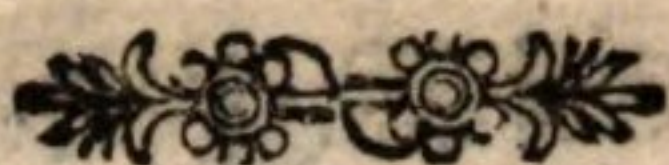
in die *Peripherie* fällt, und dadurch aus jedem Punkte des *Diameters* und jederseits ausgehend in 4 verschiedenen Richtungen hinsichtlich der auf das *Centrum* errichteten *Perpendicularerlinien* sich endigend, die *Peripherie* beschreibt.

Aus dem Satze, der *Diameter theilt den Zirkel in 2 = Theile*, erfolgt, daß die um einen *Mittelpunkt* auf einer *graden Linie* liegenden *Winkel* zusammen 180° haben, denn es kommt hierbey nicht auf die Gröfse der *Peripherie*, also auch nicht auf die Gröfse des *Diameters* an.

*) Warum fehlte seither solche, und ähnliche Erklärungen? — — — ! — — — Man berief sich dabey, wie bey den *Principien* der *graden Linie*, der *Parallellinien* &c.: auf ein leeres *Axiom*; — oder man würde sich vielleicht entschuldigen, oder gar rechtfertigen wollen wegen des Mangels eines *practischen* Nutzens? Ist dieß aber wissenschaftliche Befriedigung, Vollständigkeit, und dem Zwecke des *Cultur* des mathematischen Sinnes gemäß? — ! —

Vermöge der Erklärung der Entstehungsart der *Peripherie* — weil sich eine *Linie*, der *Radius* mit ihrem einen Endpunkte, um ihren anderen, also unbeweglichen Endpunkt drähe bis zur Wiedererreichung der ersten Lage des beweglichen Endpunktes — könnte man auch folgern: Wenn in 2 Zirkeln die *Radien*, also auch ihr zweyfaches, die *Diameter* einander gleich sind, so decken diese

letz-



letztere einander, und die Endpunkte der einen fallen auf die Endpunkte der andern, da sich dieß nun mit jedem möglichen *Diameter* als zweyfachen *Radius* beyderseits ereignet, so fallen alle Punkte des einen Umkreißes auf die Punkte des andern, und die Kreißen sowohl als die dadurch eingeschlossenen Flächen decken einander.

Je länger der *Radius*, desto größer ist der Zirkelbogen, denn je 2 nach ihren bestimmten Punkten eines größern Zirkels laufenden *Radien* sind wegen den größern Grundtheilen des Zirkels in ihren Endpunkten weiter voneinander entfernt, als je 2 mit den genannten gleichnamigen *Radien* eines kleinern Zirkels; *et vice versa*; je größer der Zirkelbogen, desto größer die Grade, desto größer die Entfernung der Endpunkte der *Radien*, desto größer die Entfernung aller Theilpunkte zweyer *Radien*, weil alle Theilpunkte des einen *Radius* mit ihren gleichnamigen des andern *Radius* eine mit der Entfernung ihrer Endpunkte *proportionirte* Entfernung haben, indem die *Radien* grade Linie sind, je größer aber die Entfernung aller Theilpunkte beyder *Radien*, desto größer ist auch die Entfernung der Theilpunkte in jedem *Radius* voneinander, denn wäre diese nicht größer, so könnte ein gleichnamiger größerer Theil von einem gleichnamigen kleinern gedeckt werden, also müßte dieser Widerspruch statt haben, — also desto größer sind die Theile, also auch der



Inbegriff der Theile d. i. die Länge des *Radius*.
 Oder auch: Da die aufs *Centrum* errichtete *Perpendicularerlinie* in allen ihren Theilpunkten eine *proportionirliche* Entfernung von den Theilpunkten des 4tels Zirkelbogens haben muß, so muß also, wenn die *Perpendicularerlinie*, also der *Radius* größer ist, auch der Zirkelbogen größer seyn, und wechselseitig.

Sehne ist die Vereinigung jeder solchen beyseitigen *Perpendicularerlinie*; — Je näher diese Sehnen den Endpunkten der Grundlinie, also je kleiner sie sind, desto kleiner ist auch die Vereinigung der den beyderseitigen *Perpendicularerlinien* correspondirenden Bögen, *et vice versa*.

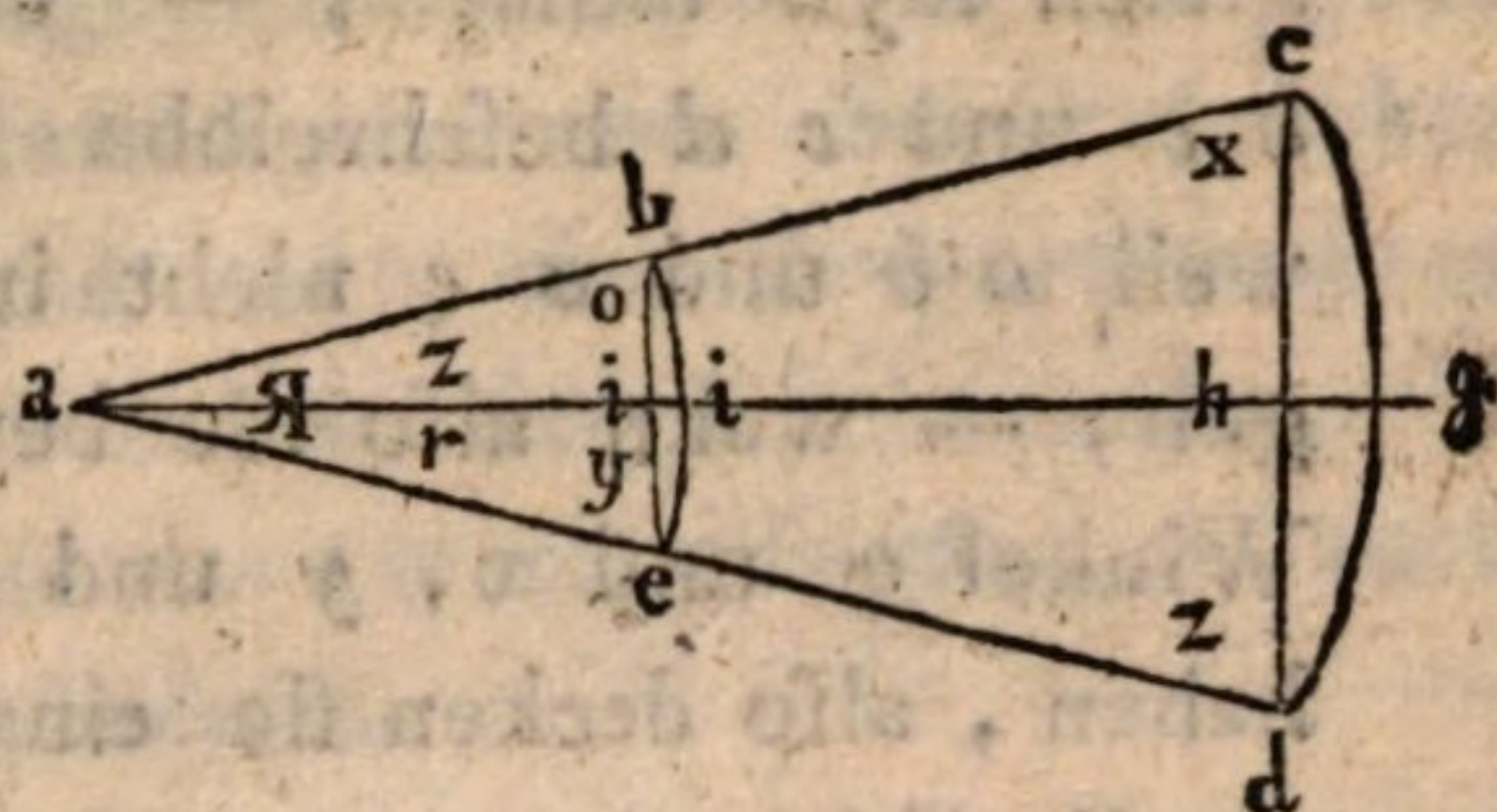
Winkel; — Eine von einem Endpunkte einer Grundlinie ausgehende Linie bildet einen Winkel als die Gränze des Zwischenraums; stößt sie aber auf einem Zwischentheil der Grundlinie, dann entstehen 2 Winkel. — Die Winkel werden gemessen durch einen zwischen den beyden Seitenlinien des Winkels d. i. den Schenkeln liegenden Theil was immer für eines von dem Zusammenstoßungs- oder Vereinigungspunkte des Winkels mehr oder weniger entfernten Zirkels; — *Dass ein Winkel, er mag durch einen nähern oder entfernern Zirkel gemessen werden, gleich viele Grade hat, obschon die*

Gra-



Grade gröfser oder kleiner find , folgt daraus, weil wenn man z. B.

in der Fig. zwischen die Endpunkte der Zirkelbögen die Linien $b e$, $c d$ zieht, diese wegen



gleichen *Distanzen parallel* find *) , also $o = x$, $y = z$, und ohnehin $R = R$ also auch jede Linie der andern *proportionirt* , und daher wegen Anwendung desselben Gleichheit - Verhältnisses jede mögliche Zwischenlinie z. B. $a g$ und $a i$, ebenso $b i$ und $c g$ *proportional* , also auch die im ersten Falle den $=$ Winkeln r , im andern s entgegenstehenden Bogen als ihre Masse ; oder auch *radius* $a b : \text{radius } a c =$ derselbe *radius* $a e : a d$, und so jede Zwischen - Radii.

*) Denn da $a c = a d$, und $b a = a e$, so ist $a c - b a = a d - a e$, d. i. $b c = e d$, nun aber ist $o = x$, $y = z$ (weil auch $a c - b c =$ ist $a d - e d$, oder weil $a b$ und $a e$ durch gleiche Zirkelöffnung entstanden , $a b$ aber als Theil der $a c$ in ihr liegt , so wie $a e$ als Theil in $a d$, also als Theile einer graden $a c$, $a d$ mit den andern Theilen $b c$ und $e d$ dieselbe Richtung haben : und weil $c d$ und $b e$ wegen Gleichheit der $b c$ und $e d$, der $a b$ und $a e$, als bestimmt durch deren gleichweit von a entfernte



Endpunkte c, d , und b, e in ihrer Richtung gleich seyn müssen; — daß aber die Linien $b e$ und $c d$ beschreibbar sind, folgt daraus, weil $a b$ und $a c$ nicht in grader Linie liegen; — wenn also die beyden Schenkeln der Winkel o und x, y und z einerley Richtung haben, also decken sie einander (also auch ihre Zwischenräume, und deren Gränze d. i. die Winkel) also sind $b e$ und $c d$ *parallel*: oder man schließt ferner, also haben die Linien $b c$ und $e d$ auch gleiche — in der *Figur* entgegengesetzte, aber als aufeinander liegend vorgestellt, dieselbe — Richtung, also hat der Punkt b dieselbe Zuneigung zu $c d$ wie e zu $d c$, und c dieselbe Entfernung von $b e$, wie d von $e b$; ferner ist aus demselben Grunde h als der Mittelpunkt gleichweit von b und e , und i gleichweit von c und d entfernt, also steht jeder genannte Punkt auch von je 2 gleichnamigen der andern Linie gleichweit ab: nun aber bestimmen hier schon 3 Punkte, nemlich die 2 Endpunkte und der Mittelpunkt jederseits die Lage der graden Linie, also steht auch was immer für ein Punkt der einen Linie von je 2 gleichnamigen der andern Linie gleichweit ab, und auch jeder gleichnamige der einen Linie von seinem gleichnamigen der andern, also sind $b e$ und $c d$ *parallel*. — — Um zugleich durch das Maß der

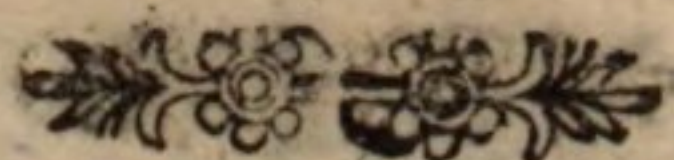


der Winkel selbst eine *Proportionalität* der Masse aller möglichen Winkel in derselben *Distanz* der Masbögen vom Scheitelpunkte zu erhalten, und auch eine *Proportionalität* verschiedener *Summen* der Winkelmasse, so ist das Zirkelmaß das zweckmäsigste; — auch ist es das geschwindeste.

*) 2 oder mehrere Empfindungen derselben Eigenschaft, z. B. Wärme können doch hinsichtlich ihrer *Intensität* verschieden seyn; das Verhältniß ihrer *Intensitäten* heißt *Grad*; eben so können 2 oder mehrere Zirkelbögen desselben Winkels hinsichtlich der *Extensitäten* ihres Masses verschieden seyn, ihre Größe ist aber nichts als, ein gleichoftmaliges Maß, oder *Grad*.

Da ein Winkel durch einen nähern oder entfernten Zirkel gemessen werden kann, so folgt die Möglichkeit ähnlicher Winkel in ungleichen gleichartigen *Figuren*.

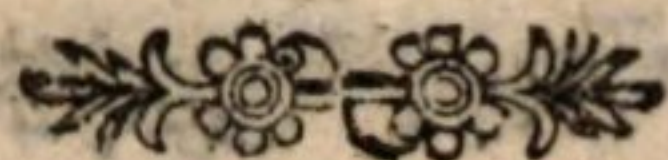
Wenn ein Winkel den andern deckt, also auch seine 2 Schenkel aufeinander liegen, und wenn diese wegen gleicher Länge einander decken, — da nun die beyden zusammenstossenden Schenkeln jederseits gleichviel Raum einschließen, so decken auch die zwischen den Schenkeln liegenden Flächen einander, ferner die Gränzlinie der Flächen, d. i. eine 3te die beyden Schenkeln vereinigende Linie; dieß ist also zugleich der Beweis der Gleich-



heit der $\triangle$ bey 2 = Schenkeln und einem dazwischen liegenden gleichen Winkel.

Fläche ist die Lage der Theile eines continuirlichen räumlichen Ganzen, deren jeder Theil von 3 andern begränzt wird, ausser den Endtheilen, welche nur an 2 gränzen. Da aber 3 Gränztheilen nicht in einer Linie liegen, so muß der 3te mit einem der 2 andern noch in einer andern Linie liegen (hierbey liegt also dieser eine Gränztheil zugleich in 2 Linien; diese Linie kann nun mit der andern *parallel*, d. i. auch *perpendicularer* oder *schief* stehen; Ist aber diese zweytere Linie zweymal oder mehrmal vorhanden, so entsteht bey jedesmaligem *perpendicularerem* oder *schiefen* Stande derselben 1 innerer Theil mit 4 Gränztheilen; Sind aber die äufsern Linien *parallel* mit der ursprünglichen, so erhält jeder innere Theil 4 Gränztheile. — Die äufsern Gränzen einer Fläche lassen sich durch Linien vorstellen; da also 2 dieser Linien zwischen den 2 andern *perpendicularer* oder *schief* liegend an sie gränzen; so ertheilen sie auch der von ihr begränzten Fläche ihre Eigenschaft als Linie, daher grade, Krumme Fläche; — Eben so charakterisirt eine grade oder Krumme Fläche als Gränze eines Körpers dessen Eigenschaft.

Kör-



Körper *) ist die Lage der Theile eines continuirlichen räumlichen Ganzen, deren jeder Theil von 4 andern begränzt wird, aufser den 2 Endtheilen, welche nur an 2 gränzen; Jeder innere Theil hat 6 Gränztheile.

Figur ist eine begränzte Fläche, welche also als Fläche wenigstens 4 Theile hat, nemlich 3 Theile, die an einen gränzen; aber diese 3 Gränztheile haben bey der *Figur* eine äußere Gränze, welche durch Linien vorgestellt wird; — Aus dem ersten Begriffe hinsichtlich der einfachsten Flächen folgt, daß die kleinste gradlinigte *Figur* ein Δ ist; dieß folgt auch daraus, weil 2 grade Linien zur Einschließung einer Fläche ihre Endpunkte vereinigen (weil sowohl das eine Ende der einen, als auch ihr anderes Ende von der andern berührt werden müßte), und also, da zwischen 2 Endpunkten nur eine grade Linie möglich ist, in eine zusammenfließen müßten: — So kann auch kein Körper durch 2 ebene Flächen eingeschlossen seyn.

Grund-

*) *Körper* in nicht mathematischer, sondern in phylosophischer Hinsicht — ist der aufser dem Beziehen des Denkens und Handelns liegende Grund der Möglichkeit eines Gegenstandes der Vorstellung.



Grundsatz:

Wenn die Gränztheile einander decken, so deckt sich auch der ganze Inhalt; denn die Fläche &c. ist ein continuirliches räumliches Ganze, und hat also keine leeren, oder ungleichartigen Zwischenräume.

Die geometrische Gleichheit bestehet in demselben Masse zweyer Linien, Flächen, oder Körper; die geometrische Aehnlichkeit bestehet in derselben Lage der Gränzzlinie, oder Gränzflächen; Congruenz — in beyden.

Grundsätze über die Gleichheit der Dreyecke.

Wenn 2 Linien, und ein dazwischen liegender Winkel $\equiv$ sind 2 andern Linien, und einem dazwischen liegenden Winkel, so decken aus diesem Grunde die Linien wechselseitig einander, und wegen der Gleichheit der 2 Seiten decken auch die zwischen ihren Endpunkten gezogenen Linien einander, und sind also auch einander gleich, weil durch 2 Punkte die Lage einer graden Linie bestimmt ist, die 2 Punkte sich aber hier decken; diese 3te Linie ist nun die Schließungslinie eines $\triangle$, in welchem also die Gleichheit zweyer Linien und eines Winkels schon theils *supponirt*, theils erwie-

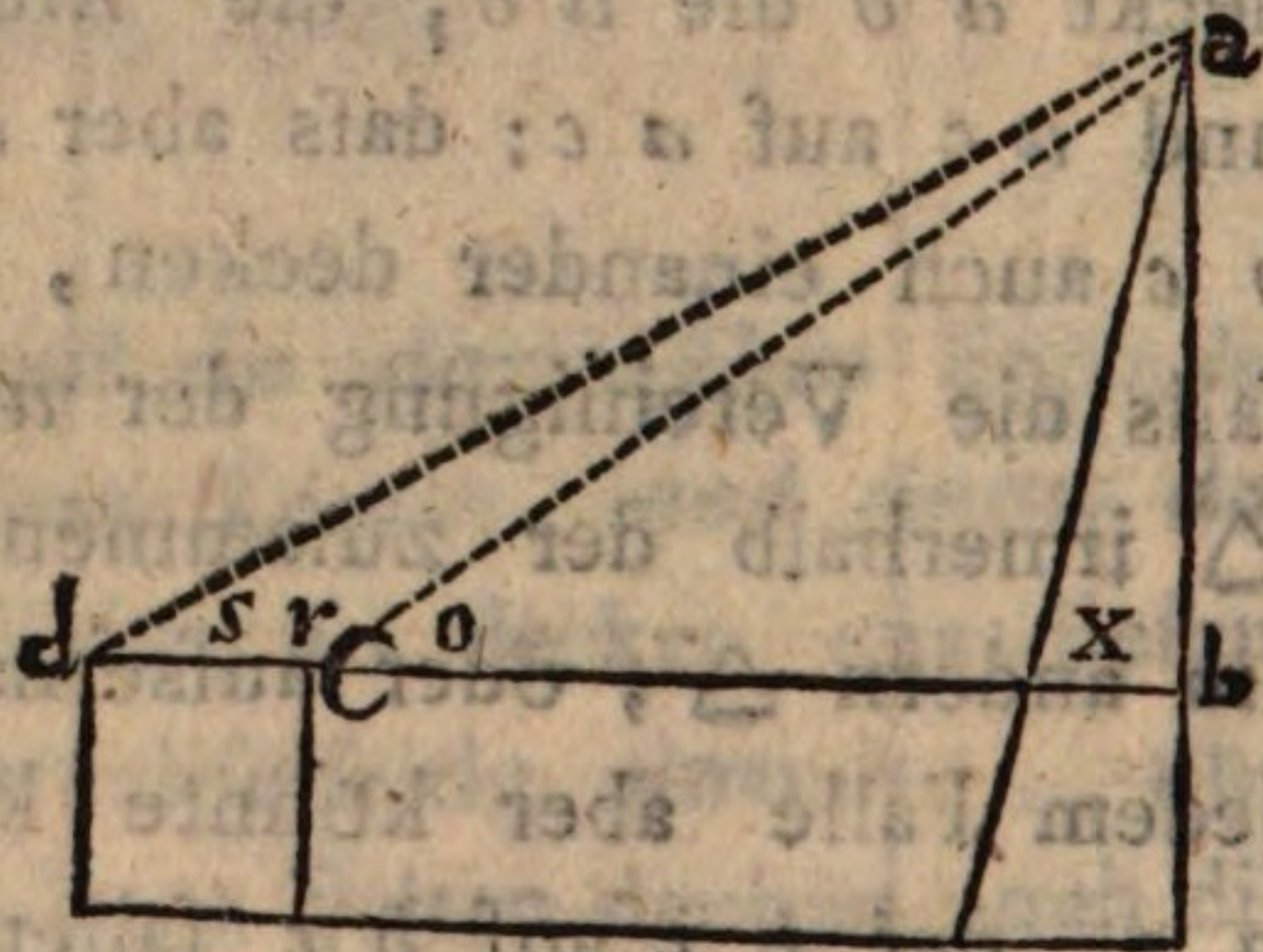


wiesen, die 2 übrigen Winkel aber einander gleich sind, weil die gleichen Seiten sich einander decken, und also dadurch die Weite des Winkel bestimmt ist; — Dafs in 2 $\triangle$ die Gleichheit einer Linie, und zweyer daran liegender Winkel die Gleichheit der $\triangle$ bestimme, erfolgt, weil durch die Gleichheit genannter Winkel die sich aufeinander beziehenden Lagen der 2ten und 3ten Seite des $\triangle$ bestimmt, eben so die Lage jeder gleichnamigen Theile der 2 Seiten, also auch ihr Vereinigungspunkt bestimmt ist. — Dafs 2 $\triangle$ von 3 = Seiten einander = sind, ist itzt klar. — Es gelten vom 2ten und 3ten Satze auch folgende

apagogische Beweise; 1) Wenn in $a\overset{c}{\triangle}b$ und $a\overset{c}{\triangle}b$ $ab = ab$, $cab = cab$, $abc = abc$, so deckt ab die ab , die Linie bc fällt auf bc , und ac auf ac ; dafs aber ac und ac , bc und bc auch einander decken, folgt, weil widrigenfalls die Vereinigung der ac und bc des einen $\triangle$ innerhalb der zusammengesetzten Linie acb im andern $\triangle$, oder ausserhalb derselben läge; in jedem Falle aber könnte kein Theil der ac auf ac , der bc auf bc fallen ausser dem ersten a und b , d. i. es wären die Winkel $c a b$ und $a b c$ nicht gleich den gleichnamigen im andern $\triangle$; diefs widerspräche dem *Suppositum*; und wenn die Schenkel der Winkel c einander decken, so decken sich auch die Winkel selbst. — 2.) Wenn alle 3 Seiten gleich sind, so deckt ab die ab ,
würde



würde aber $a c$ nicht $a c$, und $b c$ nicht $b c$ decken, so würden sie auch nicht einander gleich seyn, denn man nehme an, der Vereinigungspunkt c des einen $\triangle$ falle innerhalb oder außerhalb des Winkels c im andern $\triangle$, so wären im ersten Falle die $a c$ und $b c$ des ersten $\triangle <$, im andern $>$ als die gleichnamigen Seiten des andern $\triangle$; Weil sich nun je 2 der gleichnamigen Seiten als Schenkel ihres Winkels decken, so decken sich auch ihre Winkel. — Aus diesen Sätzen erfolgt also auch, dafs aus jedem genannten *Supposito* der Gleichheit der $\triangle$ sich auch die *Resolution* der unbekannten 3 übrigen Theile eines $\triangle$ ergibt; So reicht also z. B. bey Beurtheilung der Höhe eines Berges oder Thurns der Winkel $o + x$ des $\triangle a c b$ nicht hin, wohl aber wenn man die Seite $a c$ durch die Winkel r und s und die Linie $d c$ im andern $\triangle$ erhält; denn



obgleich dieser Fall keines der andern *Suppositen* hat, so überzeugt man sich doch leicht von seiner Richtigkeit, weil nemlich das $\triangle a b c$ rechtwinklicht ist, und durch die Seite $a c$ die Endpunkte der $b a$ und $b c$ gegeben sind.



IV. Abschnitt.

Eine Skizze des Zusammenhangs geometrischer Lehrsätze und Beweise.

Aus dem Satze — alle Winkel um einen Mittelpunkt an einer graden Grundlinie haben 180° — erfolgt erstens — daß die Scheitelwinkel einander gleich —, zweytens mit Hinsicht — ein $\triangle$ hat nur 180° (und dann hinsichtlich der *Principien* — 2 Dinge die einem 3ten $=$ sind, sind unter sich gleich) — daß der äußere Winkel eines $\triangle$, nemlich der Nebenwinkel auf der graden Grundlinie eines $\triangle$ den 2 innern entgegengesetzten $=$ ist —; aus diesem aber — mit Hinsicht der Gleichheit der *Radien* — daß ein Peripheriewinkel den $\frac{1}{2}$ Bogen, worauf er steht, zu seinem Maße hat; (hieraus z. B. — daß alle Peripheriewinkel auf einem *Diameter* d. i. rechte Winkel 180° haben — ferner — daß alle Winkel eines $\triangle$ 180° haben) eben so — mit Hinsicht der Gleichheit der äußern und innern Winkel bey Parallellinien —, welche auch wieder die Gleichheit der Scheitel - und Wechselwinkel *supponirt* — daß ein über der *Peripherie* stehender Winkel zu seinem Maße den $\frac{1}{2}$ Unterschied der beyden Bögen hat, auf welchem er ruhet; — Aus dem Satze — der Gleichheit der $\triangle$ bey 2 $=$ Seiten und 1 dazwischen liegenden gleichen Winkel — mit Hinsicht derselben Gleichheit bey gleicher



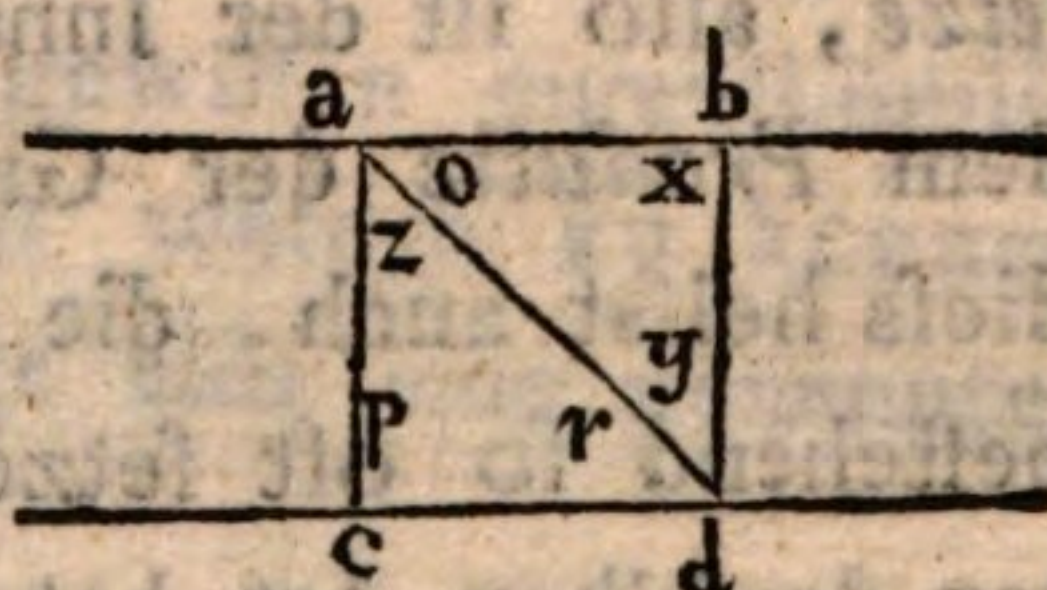
cher Grundlinie und Höhe, welches von *Parallelogrammen*, welche unter denselben Bedingungen stehen, hergeleitet wird, dann auch — mit Hinsicht eines anderwärtigen Beweises, daß ein $\triangle$ die Hälfte eines *Parallelogramms* ist — erfolgt der pythagorische Lehrsatz; auf diesen gründet sich die *Construction* eines *Quadrats*, welches $=$ ist zweyen oder mehrern andern; — Aus der Gleichheit zweyer $\triangle$ bey $=$ Grundlinien und Höhe, erfolgt ferner — die *Construction* eines $\triangle$, dessen Inhalt $=$ ist dem Inhalte eines *regulären Vielecks u. d. gl.* — Da ein *Parallelogramm* durch *Multiplication* der Grundlinie mit der Höhe gemessen wird, weil sich der Inhalt jedes *Parallelogramms* als ein Quadrat-Ganzes d. i. als ein durch *Quadrate* gemessenes darstellen läßt, so folgt, daß die Hälfte, welche jedesmal einem $\triangle =$ ist, sich eben so nebst der *Division* durch 2 messen läßt. — — Aus dem Begriffe der *Perpendicularerlinie* erfolgt die Errichtung einer solchen, und die Theilung einer Linie in 2 $=$ Theile; Wenn man 2 ungangbare *Distanzen* auf eine oben schon angegebene Art erhalten hat, so kann man zu diesen eine *Parallele* ziehen. u. f. w.

Berech-



Berechnung des Inhaltes der Parallelogramme, Dreyecke, und Figuren überhaupt.

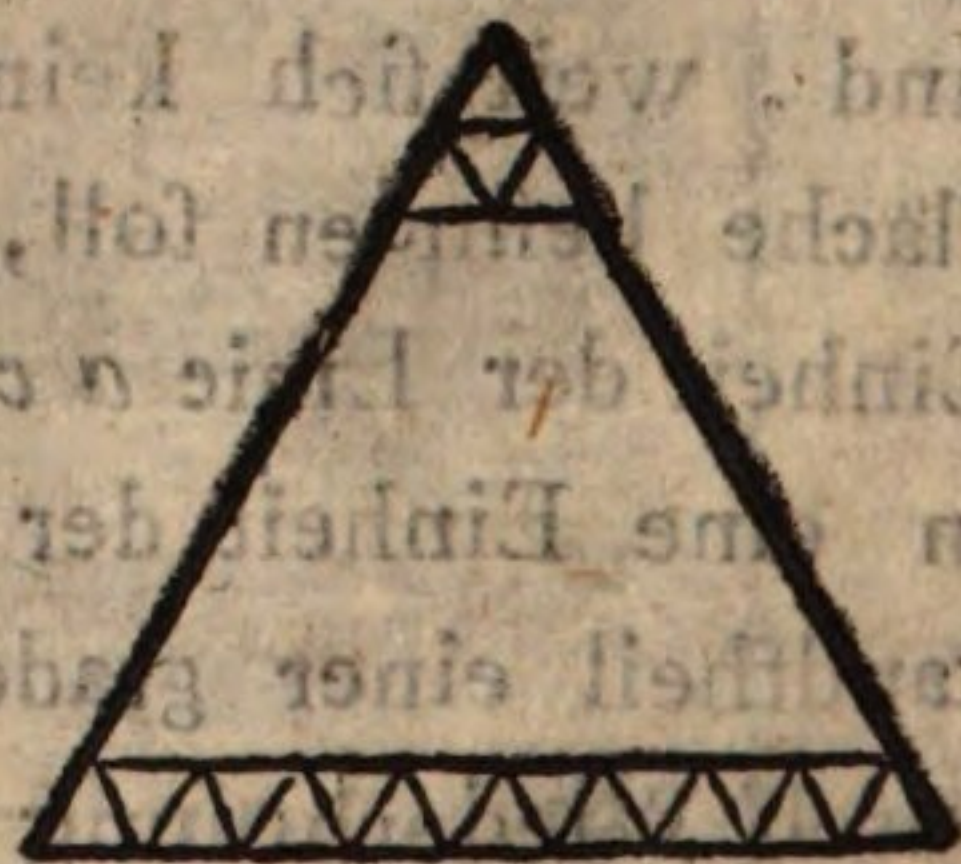
Da gleichartiges nur durch gleichartiges gemessen werden kann, so wird ein *Parallelogramm* (d. i. ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten *parallel* laufen) durch ein ihm ähnliches gemessen; vermöge diesem, und da ferner die gegenüberstehenden Winkel der *Parallelogramme* einander gleich sind, weil nach *Fig.* $o = r$, $y = z$, also $o + z = r + y$, eben so $x = p$, wegen Gleichheit der Wechselwinkel und



Intensität der $a d$ in den 2 Δ , also auch wegen Gleichheit aller Winkel $a c = b d$, $a b = c d$, so erfolgt, dafs, wenn ein *Parallelogramm* als Mafs und Einheit betrachtet, also in gemeinschaftlichen Punkte c das erstemal sowohl in der Grund- als Höhelinie enthalten ist, es das 2temal vom 2teren Punkte sowohl der $c d$ als $c a$ begränzt werde, und, weil sich kein leerer Zwischenraum in der Fläche befinden soll, dafs überhaupt jedes an eine Einheit der Linie $a c$ gränzende Mafs so wie jedes an eine Einheit der Linie $c d$ gränzende ein Bestandtheil einer graden Linie sey, wodurch also durch Wiederholung die noch zu messende Fläche kleiner und kleiner, und endlich dem Masse selbst



selbst = wird, womit alsdenn die Zahl der Masse vollendet ist, so werden genannte entstehenden gerade an die jedesmal vorhergehende angränzenden Linien, um eine solche Linie sowohl im Grunde als in der Höhe immer kleiner, nun aber liegt jeder Punkt dieser immer erneuerten Linien in einer graden Linie zu einem jedesmal verschiedenen Punkte in der ursprünglichen Höhe — und Grundlinie, welche 2 zusammen gleichnamig sind; eben dasselbe entsteht aber, wenn ich die eine Linie, Z. B. die Grundlinie so oft, als die Höhelinie Einheiten hat, setze, also ist der Inhalt eines Parallelogramms = dem Producte der Grundlinie mit der Höhe; und dieß heißt auch, die Grundlinie als aus Einheiten bestehend so oft setzen, als die Höhelinie Einheiten derselben Art hat; (daß das oftmalige Setzen der Grundlinie immer mit einer Einheit der Höhelinie anfangen müsse, und nicht eine continuirlich fortgehende einzige Linie bilde, folgt aus der Bedingung — Es seye eine Fig.) da nun aber ein $\triangle$ durch ein ähnliches Kleinere nur so gemessen werden kann, daß die Grundlinie abwechselnd unten und oben zu liegen kommt, z. B. da aber dadurch eben aus je 2 $\triangle$ ein Parallelogramm entsteht, so läßt sich das Maß der $\triangle$ als der Hälfte der Parallelogramme aus deren Masse finden; — Nun aber wird der



In.



Inhalt aller gradlinigten Figuren, die *Parallele-*
gramme ausgenommen, durch den Inhalt der in
ihnen enthaltenen $\triangle$ berechnet; da aber auch der
Zirkelinhalt $=$ ist einem $\triangle$, dessen Grundlinie
die *Peripherie* und Höhe der *Radius* ist, und also
auch eben so jeder Zirkelausschnitt $=$ einem $\triangle$
mit dem Bogen als Grundlinie und *Radius* als Hö-
he; da ferner jede *irregulær* krummlinigte *Figur*
als aus den kleinstmöglichen graden Linien be-
stehend, daher auch in die kleinstmöglichen $\triangle$ ver-
wandelt werden kann, da ferner jede *regulære*
krumme Linie nach einer gewissen eigenthümli-
chen Regel in $\triangle$ verwandelt werden zu können
fähig seyn muß; so erfolgt also jede genannter
Inhalts Berechnungen.

V. A b f h n i t t.

Grundbegriffe einer Wissenschaft des Rechnens.

§. 1. *Postulat*

1. jeder Rechnungsart ist:

a) Ein Ganzes und seine Theile;

b) aa) Die Bestimmbarkeit einer Zahl durch 2
absolute oder *relative* Einheiten, also Gröſſen
(durch *absolute* ist nie, als bey der einfachsten

Addi-



Addition) — diese Bestimmung geschieht durch *Addition* oder *Multiplication*.

bb) Die Bestimmbarkeit einer absoluten oder relativen Einheit (Größe) (Die Bestimmung einer absoluten — oder durch eine absolute ist nie, als bey der *Subtraction*) — diese Bestimmung geschieht durch *Subtraction* oder *Division*.

2. Specieller Rechnungsart:

Die Oftmaligkeit einer Größe bestimmt durch eine andere, oder durch eine Zahl — hinsichtlich des obigen vorletzten mathematischen Grundsatzes.

§. 2. Begriff des Rechnens.

1.) Nach der ersten Vorstellungsart a) heißt Rechnen — durch ein Beziehen der Theile das Ganze, oder durch ein Beziehen des Ganzen und eines Theiles den andern Theil bestimmen.

2.) Nach der speciellen Vorstellungsart: — das Oftmalige durch ein Beziehen des Einfachen und der Oftmaligkeit — oder, wenn das Einfache und Oftmalige $=$ sind, durch ein Beziehen des Einfachen zu sich selbst, als Einfaches und Oftmaliges — bestimmen; — man kann



kann auch nach geschehener *Multiplication* die Oftmaligkeit durch ein Beziehen des Oftmaligen und Einfachen — oder das Einfache durch ein Beziehen der Oftmaligkeit und der Oftmaligen, — jedesmal durch eine *Division* bestimmen.

§. 3. Rechnungsarten.

1.) Ein Ganzes durch Vereinigung ungleicher Theile bestimmen heisst *Zusammensetzen*, *addiren*.

2.) Ein Ganzes durch eine (durch den *Multiplicator*) bestimmt - oftmalige Darstellung, und einmal weniger geschehene Vereinigung gleicher Theile bestimmen heisst *Vermehren*.

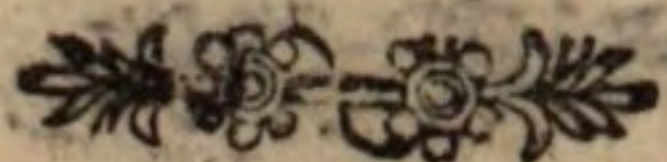
Andere Erklärung.

Die gefundene Grösse ist oftmal grösser als eine der 2 gegebenen und die Oftmaligkeit des grösserseyns, wird um Eins durch die andere Grösse übertroffen.

Oder:

Multipliciren heisst auch eine Grösse (den *Multiplicandus*) einmal weniger *addiren*, als der *Multiplicator* Einheiten hat.

* Jede



*) Jede aus *Factoren* zusammengesetzte, also durch *Multiplication* entstandene Gröſſe enthält wenigſt 2 ſolche Gröſſen, deren jede wechſelfeitig der *Coeficient* *) der andern, und die andere eine *relative* Einheit iſt: z. B. in 7 als $3 + 4$ betrachtet, iſt 4 der *Coeficient* von 3, und 3 der *Coeficient* von 4, und wechſelfeitig — ſind die gegenſeitigen *Coeficienten* als gegenſeitige *Factoren* zu betrachten; — Vermöge letzterm iſt alſo auch $\sqrt[3]{27a^3} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{a^3} = 3 \times a$; hierbey muß aber auch das *Princip* behinſichtigt werden: „Das *Product* der *Quoten* aus einfachen *Dividenten* und *Diviſoren* iſt = dem *Quotus* aus dem „*Producte* der *Dividenten* und *Diviſoren*;“, hiervon der Beweis weiter unten.

Wenn eine negative Gröſſe oftmal negativ geſetzt, d. i. oftmal aufgehoben wird, ſo wird alſo eben dadurch eben ſo oftmal etwas *positives* als Mangel der *Negation* geſetzt; wird aber eine negative Gröſſe als ſolche oftmal *positiv* geſetzt, ſo entſtehet ein oftmal geſetztes *negatives*, d. i. ein *negatives Product*: eben ſo, wenn eine *positive* Gröſſe

*) Der *Coeficient* zeigt an, wie oft der Buchſtabe als Gröſſe in der *addition* ſteht, und daß die *Addition* einmal weniger vorgenommen worden ſey; — der *Exponent*, wie oft er in der *Multiplication* ſteht, und daß ſie einmal weniger vorgekommen ſey.



Gröfse oftmal negativ gesetzt wird, denn es wird eine gesetzte Gröfse oftmal aufgehoben.

3.) Ist der Theil, und die oftmalige Darstellung desselben gleich groß, so heißt das oftmalige bestimmen des Theils oder der einen Gröfse *Potenzerhöhung*.

Eine Zahl mit sich selbst *multiplicirt* gibt eine *Potenz*. — Einen *Exponenten* mit einem andern *multipliciren*, heißt eine *Potenz* zu einer andern erheben.

4.) Einen Theil durch Trennung des andern Theils vom Ganzen bestimmen, heißt *abziehen*;

Oder:

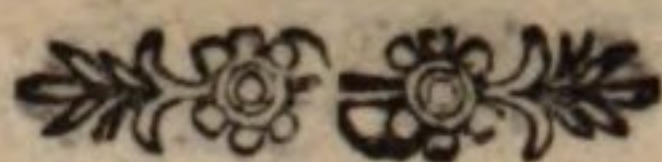
Finden, wie viel zu einem Theil als anderer Theil zugesetzt werden muß, um das Ganze zu erzeugen;

Oder auch:

Den Unterschied der Gröfsen finden.]

Anmerkung.

Die Veränderung der Zeichen des *Subtrahenden* läßt sich dadurch erklären, weil minus, d. i. — mit — *multiplicirt*, plus d. i. + giebt: den



denn eine jede noch so große Größe kann von einer Größe *subtrahirt* oder mit ihr *multiplicirt*, also auch *dividirt* werden; also ist die Eigenschaft, welche die Größe durch die *Multiplication* und *Division* oder *Subtraction* erhält, allgemein: man ziehe also von $7 + 6$ ab $- 3 - 2$: Da nun aus der *Multiplication* und *Division* des minus $+ *$) entsteht, so wird aus dem *Subtrahenden* *Minus plus* entstehen.

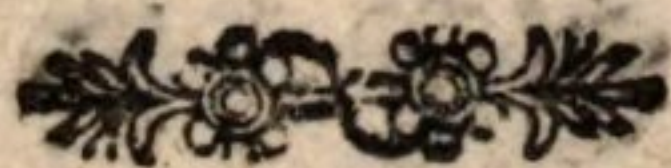
5.) *Theilen* heißt gleiche Theile (*Divisoren*) eines Ganzen (des *Dividendi*) bestimmt oftmal (durch den *Quotus*) setzen: also ein Ganzes in gleiche Theile zerlegen.

Andere Erklärung:

Dividiren, heißt finden, der wievielte Theil des *Dividendus* der *Divisor* ist:

Oder

*) Eigentlich ist der Beweis, daß $-$ mit $- +$ giebt, weil, wenn $a = 2 a - a$ jederseits mit derselben Größe $- b$ multiplicirt wird, und das Gegentheil angenommen würde $- a b = - 2 a b - a b$ also $- a b = a b - 3 a b$ entstünde; und Minus mit $+ -$ Minus, — der deutlichste; — das letztere beweist sich eben auch, weil widrigenfalls bey jederseitigen *Multiplication* des $a = 2 a - a$ durch $+ b$, $a b = 3 a b$ entstünde. — Eben so die Beweise von der *Division* und *Multiplication*.



Oder:

Dividiren, heisst bestimmen, um wie vielmal eine Grösse (der *Dividend*) grösser ist als eine andere (der *Divisor*) das wie vielmal ist durch den *Quotus* um eine Einheit mehr bestimmt;

Also heisst auch *Dividiren*

Finden, wie vielmal eine Grösse in der andern enthalten ist;

D 2

Oder

cation der Brüche: Es sey $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ so entsteht

$\frac{a d}{b e}$, ferner aus $\frac{a}{b} \times \frac{c}{b}$ entsteht $\frac{a c}{b d}$; denn

jeder erste Bruch seye seinem *Quotienten* m , jeder 2te seinem *Quotienten* n gleich; —

Multiplicirt man nun jedesmal und jederseits mit dem Nenner die 2 gleiche Grössen, so entsteht jedesmal $\frac{a b}{b} = m b$, $\frac{c d}{d} = n d$,

also hieraus entsteht das erstemal $\frac{a}{c} = \frac{m b}{n d}$,

und durch Zusatz dessen, was noch bey Zähler und Nenner mangelt $\frac{a d}{b c} = \frac{m b d}{n b d} = \frac{m}{n}$;

des andremal $\frac{a c}{b d} = \frac{m b n d}{b d} = m n$;

$m n$.



Oder :

Dividiren heisst eine Grösse (den *Divisor*) einmal weniger als der *Quotus* Einheiten bekommt, *subtrahiren* : — Wird sie aber wieder eben so oft *addirt*, so erhält man den *Dividend* wieder.

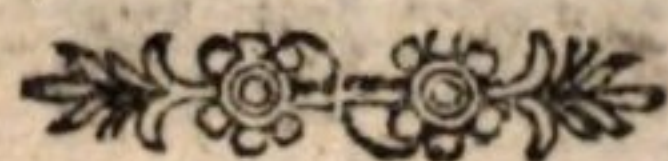
Oder :

Eine Zahl, denn *Dividend* einmal weniger kleiner machen, als der *Divisor* Einheiten hat; wie gross sie alsdenn noch ist, beweist der *Quotus*; diese *Definition* ist das Gegentheil einer *Definition* der *Multiplication*.

Auch

Dividiren heisst eine Grösse, den *Dividendus* durch den *Divisor*, d. i. durch die *Summe* seiner Einheiten als Einheit betrachtet, messen; die Oftmaligkeit des Maases zeigt der *Quotus* an, und ist *identisch* mit der Zahl, welche den Werth eines Bruchs ausdrückt. — Nur nach diesem Begriffe der *Division* ist die Identität eines Bruchs und einer *Division* z. B. $6 : 3 = \frac{6}{3}$ erklärbar; — — Wird die *Summe* der im Maase enthaltenen Einheiten wieder so oft gesetzt, als das Maas durch den *Quotus* bestimmt gesetzt ist, so kommt das gemessene, der *Dividend* wieder zum Vorschein.

Der



Der *Dividend* ist gleich dem *Produkte* des *Divisors* und *Quotus*, denn wenn $a = \frac{b}{q}$, so ist $a = b q$

durch beyderseitige *Multiplication* mit b .

Fernere Vorstellungsarten der Division:

Der *Divisor* ist zu betrachten als die Einheit eines *Zählers*, dessen *Nenner* der *Quotus*, und das *Bruchs - Ganze* der *Dividend* ist: also kann auch wechselseitig der *Quotus* als *Zähler*, und der *Divisor* als *Nenner* betrachtet werden. — Ist ferner der *Dividend* *Zähler*, und der *Divisor* *Nenner*, so drückt der *Quotus* den Werth des *Bruchs* aus, — eben wechselseitig der *Divisor*, wenn der *Quotus* *Nenner* ist.

Satz: Wenn die ganze *Summe* und ein Theil durch irgend eine nemliche Gröfse theilbar ist, so ist auch der andere Theil dieser nämlichen *Summe* durch eben dieselbe Gröfse theilbar; weil z. B. bey $14 + 21 = 35$, sowohl 35 als auch 14 durch 7 theilbar ist, so ist auch 21 durch 7 theilbar; denn man betrachte den theilbaren *Factor* als das Einfache, so zeigt der andere *Factor* die Oftmaligkeit dieses Einfachen Theilbaren an.

Anmerkung: Aus *Dividend* und *Divisor* lassen sich wechselseitig in einander, so wie aus
Zäh-

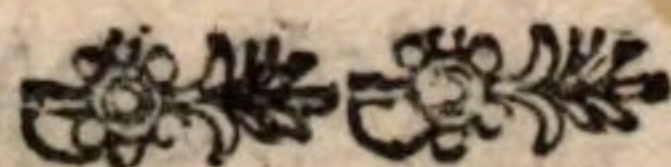


Zähler und Nenner, Gröſſen mit veränderten Zeichen der *Exponenten* übertragen: denn es entsteht durch *addition* gleicher Gröſſen zu jedem, z. B.
$$\frac{a b^2 + a - 1}{c x - m} \times m = \frac{b^2}{a - 1} \times m;$$

Daher läßt ſich auch *Dividiren*, ohngeachtet dieſelben Buchſtaben oder *Exponenten* nicht im *Dividend* vorkommen, was alſo hernach im *Dividend*, und nicht im *Diviſor* iſt, läßt ſich im *Quotus* ſetzen.

3ter Lehrsatz; Das Product der Quoten aus einfachen *Dividenden* und *Diviſoren* iſt = dem *Quotus* aus dem Producte der *Dividenden* und *Diviſoren*, z. B. $\frac{8}{2} \times \frac{6}{3} = \frac{48}{6} = 8 = 4 \times 2;$ denn wird der eine *Dividend* und *Diviſor* vermehrt, ſo wird auch der erſte *Quotus* um den andern vermehrt, d. i. der neue *Quotus* iſt = dem Producte der beyden. — Aus demſelben Grunde wird aus einem Producte eine Wurzel *extrahirt*, Wenn man aus jedem *Factor* die Wurzel insbeſondere zieht, und ſolche miteinander *multiplicirt*.

4ter Lehrsatz: Wenn man bey einer *Division* den *Dividend* und *Diviſor* mit einer nämlichen Gröſſe *multiplicirt* oder *dividirt*, ſo bleibt der *Quotient* ungeändert; — denn da der *Dividend* das Product des *Diviſors* und *Quotienten* iſt, ſo iſt die Veränderung des
Divi



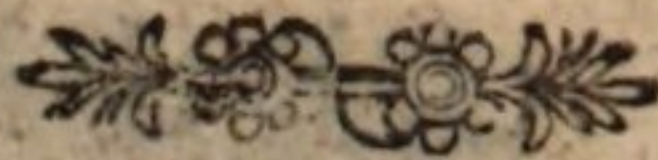
Dividendus welche $=$ ist der Veränderung eines *Factors* zu betrachten als die Veränderung des Antheils dieses *Factors* im *Dividend* als Product: es ist also so viel, als wenn dieser Factor vor dem Dividend als Product um so viel gröfser oder kleiner gewesen wäre; — Unten bey der Umwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche kömmt eine wechselseitige Anwendung genannter Veränderung des Divisors auf den Quotienten vor.

3ter *Lehrsatz*: Ein Ganzes durch sich selbst dividirt giebt Eins; denn hierbey ist der Divisor als Mafs und Theil des Ganzen so oft im Zähler enthalten, als ihm selbst gleiche Theile im Ganzen enthalten sind: d. i. der Zähler befaßt alle Theile des abgetheilten Ganzen.

4ter *Lehrsatz*: Eine Zahl durch eine Einheit gemessen, giebt mit ihr gleiches; denn das Maas ist die Zahl selbst als eine Einheit: hieraus folgt, dafs $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} : \frac{4}{1}$.

6.) Sind der Theil und die Oftmaligkeit des Zerlegens gleich grofs, so ist die Zerlegung eine *Wurzelauszziehung*: der Dividend, das Ganze ist die *Potenz*.

So viele Klassen eine Potenz durch die Abtheilung (das *Quadrat* in jeder 2 und 2, der *Cu-*



Culus 3 und 3) erhält, so viele Zahlen erhält die Wurzel; die Gründe, so wie die *Functiōnen* der Wurzel - Ausziehungen selbst, sind in den gewöhnlichen Lehrbüchern angegeben; — dieß gilt auch in ähnlichen Fällen.

Postulat des Dezimalmechanisms ist;

Eine höhere Einheit ist gleich der *completen* Zahl aller enthaltenen Einheiten.

2.) *Begriff*: Der *Dezimalmechanism* ist eine von der Rechten zur Linken unterscheidende Setzart *absoluter* Einheiten, ferner der Einheiten der *ioner*, *iooter*, *ioooter* &c.

3.) *Anwendung aufs Rechnen*;

Da nur gleichartiges *addirt* werden kann, oder *subtrahirt* &c., so können nur *absolute* Einheiten zu solchen, Zehner zu Zehner *addirt*, *subtrahirt* werden &c.; der Zehner als *Multiplicator* bringt ein *Product* von Zehner, der *iooter* von *iooten* &c. hervor, daher kömmt der ersten Ziffer des Zehner — *Products* unter die 2te d. i. die Zehnerstelle der 1ten Reihe, die des *iooter Products* unter derselben 3te Ziffer.

Algebra ist die Wissenschaft, Zahlen durch Buchstaben auszudrücken, und zu berechnen.

a)



a) Eine *algebraische* Gröſſe hat ſo viele Glieder als die Zeichen $+$ oder $-$ vorkommen ;

b) *Algebraische* Gröſſen ſind gleichnamig , wenn ſie dieſelben Buchſtaben, und jeder Buchſtabe denſelben *Exponenten* hat ;

c) Der *Coeficient* und *Exponent* wird nicht ausgedruckt, ſondern muß bey dem *iſolirten* Buchſtaben hinzugedacht werden.

d) Die *Coeficienten* gleichnamiger Gröſſen werden mit Beybehaltung ihres Zeichens *addirt*, wenn ſie dieſelben Zeichen haben, — haben ſie aber verſchiedene Zeichen, ſo wird mit Beybehaltung des Zeichens des gröſſern *Coeficienten*, der kleinere *Coeficient* vom gröſſern *ſubtrahirt*.

e) Eine Gröſſe von einer andern ſubtrahiren heiſſt ſie mit veränderten Zeichen ihrer Glieder zur andern *addiren*.

f) Bey der *Multiplication* werden die *Coeficienten multiplicirt*, die *Exponenten addirt*, und dieſelben Buchſtaben einmal geſchrieben; bey der *Division* werden die *Coeficienten dividirt*, und die *Exponenten ſubtrahirt*.

g)



g) Bey algebraischen Rechnungarten ist weder *Dezimalmechanism*, noch irgend ein *Mechanism* in der Setzart, aufser der Regel, in alphabetischer Ordnung die Gröſſen anzuschreiben, übrigs kann von der Rechten zur Linken, oder von der Linken zur Rechten *addirt*, *subtrahirt*, oder *multiplirt* werden, eben ſo mit dem einen oder mit dem andern Gliede des *Divisors*, oder abwechselnd *dividirt* werden.

h) Die bekannten Gröſſen fangen an mit den Anfangsbuchſtaben des Alphabets; die Unbekannten heißen x, y, z .

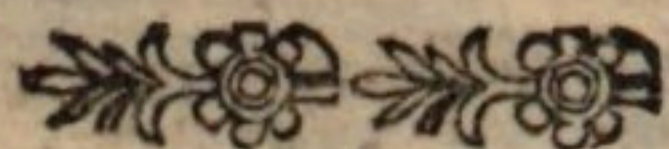
i) *Algebraische Beispiele einer Zerlegung in Factoren*;

2.) $2 a^2 b^2 + 2 a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 2 a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4 - [a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4]$ wegen bloß angezeigter *Subtraction*; ferner $c^2 [a^2 + 2 a b + b^2] - c^4 - [a^2 - b^2]^2$ wegen Trennung des c^2 , wegen Vereinfachung des $2 a^2$ und $2 b^2$, wegen Zusatz des ſich aufhebenden $+ 2 a b - 2 a b$; und wegen Wurzelausziehung aus dem *Subtrahenden*; ferner $c^2 [(a + b)^2 + (a - b)^2] - c^4 - [a - b]^2 [a + b]^2$ wegen viermal vorkommender Wurzelausziehung;



ziehung ; — ferner $c^2 [a + b]^2 - c^4 - (a - b)^2 (a + b)^2 + c^2 (a - b)^2$ durch Abziehung der 2ten Abtheilungsgrößen vom 1ten Factor ; und nachherigen Zusatz des 2ten Factors ; — ferner $c^2 [(a + b)^2 - c^2] - (a - b)^2 [(a + b)^2 - c^2]$ durch Zertheilung des c^4 , und Weglassung des 2mal vorkommenden $[a - b]^2$, und Abziehung des getheilten c^4 von einem Factor statt vom Producte ; — ferner $[(a + b)^2 - c^2] \cdot [c^2 - (a - b)^2]$ durch Weglassung eines 2malig vorkommenden Factors ; ferner $[a + b + c] [a + b - c] [c + a - b] [c - a + b]$ durch Wurzelausziehung,

2.) $2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n = n [2n^2 + 3mn + 3m - 2]$ durch Trennung des n als allgemeinen Factors ; — ferner $= n [2(n^2 - i)] + 3m [n + i]$, durch Trennung des 2 von n^2 und von dem gedachten Factor 1 in -2 , und durch Trennung des 3 m von n und dem gedachten Factor 1 in $+3m$; ferner $n [2(n + i) \cdot (n - i) + 3m(n + i)]$ durch Zerlegung des Quadrats $n^2 - i$ in seine Factoren ; ferner durch Multiplication des $n - i$ mit 2 und Weglassung



lassung des 2mal vorkommenden $n + i$,
 ist $= n [n + i] [2n - 2 + 3m]$.

3.) $n^3 - 3n^2 + 2n = n (n^2 - 3n + 2)$, ferner $= n [n^2 - n - 2n + 2]$
 durch Trennung des Coefficienten $3n$ um
 ein 2maliges 2gliedriges Product zur Zer-
 legung zu erhalten; also $n [n(n - i)]$
 $- 2[n - i] = n [n - i] [n - 2]$
 durch Zusammensetzung der einzelnen
 Factoren n und $- 2$, und Weglassung
 des 2maligen $n - i$.

Zusatz zu den vorhergehenden Abschnitten.

Die *reine Mathematik* hat die allgemeinen und
 nothwendigen Zahlen — oder Gröſſen - Eigen-
 schaften zum Gegenstande; Sie ist *angewandt*, in
 wiefern sie diesen ihren Gegenstand *modificirt* durch
 die wesentlichen, also nothwendigen, und daher
 auch allgemeinen physischen Eigenschaften dessel-
 ben. — Die *Arithmetik* hat die Zahlen - Eigen-
 schaften, die *Geometrie* die Raumsgröſſen zum Ge-
 genstande; der Gegenstand ersterer ist *unstet*, letz-
 terer *stet*. — Da die Begriffe der Rechnungsarten,
 und die ersten Begriffe der Raumsverhältnisse als
 die gemeinsten und ersten Methoden, aus bekann-
 ten Gröſſen unbekannte zu finden, angegeben sind,
 so wird also hiernach erst der Begriff der Mathe-
 matik klärer, und ihre Eintheilung.



VI. Abschnitt.

Theorie der Brüche.

I. Brüche im allgemeinen — natürliche;

1.) Begriff:

Bruch ist ein Theil (der Nenner) eines in gleiche Theile getheilten Ganzen, als das Maß einer Einheit oder Zahl (des Zählers) von Theilen.

Andere Definizion:

Bruch ist ein oder mehrere (der Zähler) untergeordnete, oder enthaltene Einheiten (des Nenners) eines Ganzen.

2.) Veränderung des Bruchs:

a) durch Multiplication:

aa) ein ächter Bruch (dessen Zähler kleiner ist), oder ein unächter Bruch (dessen Zähler größer ist) wird durch *Multiplication* mit einem ächten kleiner, d. i. sein Zähler, weil die Gröſſe beyder Nenner d. i. Maafen ein größeres *Product* derselben, also ein größeres Maß verursacht,



urfacht, welches also nicht mehr so oft im Zähler enthalten ist, als bey den einfachen Brüchen, z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$; so auch $\frac{6}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. — aber

bb) ein unächter Bruch oder ein ächter wird durch *Multiplication* mit einem unächten gröfser, weil die Gröfse der Zähler ein größeres auszumessendes hervorbringt; z. B. $\frac{5}{2} \times \frac{6}{3} = \frac{30}{6} = 5$; so auch $\frac{2}{3} \times \frac{6}{3} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

b) Wenn man zu Zähler und Nenner gleiches addirt; denn

aa) man setze statt $\frac{2}{5}$ fl. durch Zusatz von $3 = \frac{5}{8}$ fl, und mache nach der gemeinen Regel beyde Brüche zu Kreuzer, so ist der erste $= 120 : 5 = 22$ kr., der zweyte $= 300 : 8 = 37\frac{1}{2}$ kr.

bb) Setzet man aber statt $\frac{5}{2}$ fl. durch Zusatz von $3 = \frac{8}{3}$, so ist der erste $= 300 : 2 = 150$ kr., der zweyte $= 480 : 5 = 96$ kr. :

3.) Werth des Bruchs:

a) Das zumessende (der Zähler) hestimmt durch seine Gröfse den Werth des Bruchs; die Gröfse des Nenners (des Masses) mindert den Bruch;

b)



b) Ist der Zähler oder die Zahl der Theile gleich dem Nenner d. i. dem Maße der Theile, so ist der Bruch ein Ganzes.

4.) Entstehung der Brüche:

a) der After Brüche:

Ganze macht man zu Afterbrüchen, d. i. durch einen gegebenen Nenner d. i. zu Theilen, deren jeder dem Nenner gleich ist, wenn man sie mit dem Nenner *multiplicirt*, und den Nenner unterschreibt, z. B. $5 = \frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3} = 5$, denn 5 wird durch gleiches *multiplicirt*, und *dividirt*; also nicht verändert.

b) Einheiten kleinerer Art werden in einem Bruch verwandelt, wenn man sie durch das Maß der größern Art misst, z. B. $25 \text{ kr.} = \frac{25}{60} \text{ fl.}$; $11 \text{ Loth} = \frac{11}{32} \text{ lb.}$

5.) Verwandlung der Brüche.

a) Bey einem ächten Bruche wird der Zähler, wenn es die Natur der Sache mit sich bringt, in Einheiten kleinerer Art verwandelt, und durch dasselbige vorige Maß (den Nenner) gemessen: z. B. $\frac{7}{15} \text{ fl.} = \frac{7 \times 60}{15} = \frac{420}{15} = 28 \text{ kr.}$ — Es kann also auch die Zahl kleinerer



rer Einheiten durch den Nenner getheilt, und dann mit dem Zähler *multiplicirt* werden.

aa) Wenn man den Zähler mit dem gegebenen Nenner *multiplicirt*, wird das *Product* durch den alten Nenner *dividirt*, denn der durch den Nenner getheilte Zähler d. i. der Werth des Bruchs wird durch diese Gröfse *multiplicirt* und *dividirt*, bleibt also unverändert, z. B. bey $\frac{4}{2}$ ist der Werth des Bruchs 2: soll nun der Nenner 3 werden, so entsteht $\frac{2 \times 3}{3} =$

$\frac{6}{3} =$ vom Werthe 2.

Da durch die *Division* des Zählers durch den Nenner Ganze herauskommen, so werden diese zum Bruch vom gegebenen Nenner, wenn man sie mit diesem Nenner wieder *multiplicirt*.

bb) Eben so wird der durch den Zähler getheilte Nenner d. i. der Werth des Nenners mit einem gegebenen Zähler *multiplicirt*; z. B. $\frac{2}{4}$ zum Zähler 3 erhoben $= 2 \times 3 = \frac{3}{2}$.

6) Gleichnamigkeit der Brüche.

a) Brüche werden auf einerley Benennung gebracht durch *Multiplication* des Zählers und
Nen-



Nenners mit allen übrigen Nennern ; hierbey bleibt also der Werth des Bruchs unverändert.

Anmerkung.

Es ist vortheilhaft., alle *Divisoren* oder Nenner, die weggebracht werden sollen, gleich anfangs auf einmal zu *multipliciren*, und dann mit jedem spezifischen, der grade hinweggebracht werden soll, hinein zu *dividiren*, um einen *Coefcienten* eines spezifischen *Dividendus* oder Zählers zu erhalten.

Das Product aller Nenner gebe den Nenner eines jeden, alsdann werde es mit jedem Zähler insbesondere multiplicirt, da nun aber jeder Zähler einmal weniger zu groß ist (Siehe die 6te *Definition* der *Division*) als sein eigner in jenem *Producte* enthaltener Nenner Einheiten hat, weil eben dieser sein Divisor ist (so wäre $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ statt $\frac{14}{21} + \frac{15}{21} = \frac{42}{21} + \frac{105}{21}$, also der erste Zähler 42 mal, der andere 105 6mal zu groß) so muß also die *Division* des allgemeinen Nennerproducts durch diesen Nennerdivisor wirklich vorgenommen werden, um den Zähler zu seiner gehörigen und jedem andern vergrößerten Zähler in Hinsicht seines ursprünglichen Nenners *correspondirenden* Gröfse zu erheben ; Um sich diese Arbeit zu erleich-

E



erleichtern, läßt man also bey der *Multiplication* jedes Zählers mit dem Nennerproducte den eigenen Nenner weg; hieraus nun erfolgt, daß weil Zähler und Nenner mit derselben Zahl d. i. dem übrigen Nennerproducte *multiplicirt* werden, der Bruch unveränderlich ist; da es also aber nur darauf ankommt, daß jeder Nenner im allgemeinen Nenner vorkomme, weil jeder Nenner mit dem *Producte* der übrigen *multiplicirt* werden soll, so kann also

) Jeder kleinerer in einem größern enthaltener Nenner ausgelassen werden: denn dieses kleinere *Product* als *Multiplicator* des Nenners ist auch der *Multiplicator* seines Zählers, man suche also ein Vielfaches vom größten Nenner auf, welches alle übrigen Nenner genau enthält, und dieses ist der allgemeine Nenner; *dividirt* man nun den allgemeinen Nenner durch den alten Nenner, und *multiplicirt* den *Quotienten* durch den alten Zähler, so hat man den neuen Zähler; denn wird der *Quotient* mit dem alten Nenner *multiplicirt*, so entsteht der allgemeine Nenner: und eben so entsteht jeder neue Zähler durch *Multiplication* des alten Zählers mit demselben *Quotienten*: also wird Zähler und Nenner um gleiches *multiplicirt*, also der Bruch nicht verändert. — — Es seye der größere Nenner 8, so kann auch 2 ausgelassen werden; ferner kann für 6 der ande-



andere *Factor* desselben 3 substituirt werden; — Die *resultirenden* Brüche sind zugleich dadurch aufs kleinste *reducirt*, in wiefern Zähler und Nenner mit der kleinsten nemlichen Zahl *multiplicirt* sind.

7.) *Berechnung der Brüche:*

a) Brüche *multipliciren* oder *dividiren* heisst ihre Werthe *multipliciren* oder *dividiren*; (*addirt* oder *subtrahirt* werden blos ihre Zähler bey gleichnamigen Nennern) so z. B. $\frac{4}{2} : \frac{7}{3} = \frac{12}{14}$, ihr Werth ist $2 : 2 \frac{1}{3}$; dieß ist $= \frac{2}{1} : \frac{7}{3} = \frac{6}{7} = \frac{12}{14}$.

Folge: also *reduzirt* man Brüche aufs genaueste dadurch, dass man ihre Werthe setzt.

Nicht das Maas, sondern das gemessene: nicht der bestimmte Theil, sondern die Zahl der bestimmten Theile wird mit einer ganzen Zahl *multiplicirt*, also der Zähler und nicht der Nenner: der Zähler als *Dividendus* muss *multiplicirt* werden; — Hingegen wird ein Bruch *dividirt* durch *Multiplication* des Nenners mit einer ganzen Zahl, denn dadurch wird das Maas oder der bestimmte Theil als *Divisor* um so gröfser, also die Zahl der Maase, oder der bestimmten Theile im Zähler um so viel kleiner; Soll $\frac{3}{4} \times$ werden mit $\frac{5}{8}$, so muss $\frac{15}{4}$ mit dem 8ten Theil von 5 *dividirt*, also 4 mit



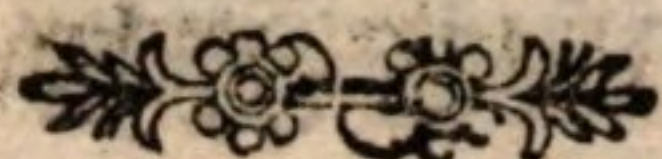
8 multiplicirt werden; — Dafs ein Bruch dividirt werde durch *Multiplication* des *Divisors* mit dem Nenner erklärt sich, weil es gleichviel ist, ob der Zähler durch das *Product* des *Divisor* - Nenners und des andern *Divisors*, oder durch jeden insbesondere dividirt werde.

b) Ein gröfserer Bruch *dividirt* durch einen kleinern wird kleiner, z. B. $\frac{4}{2} : \frac{7}{3} = \frac{12}{14}$; aber ein kleiner durch einen gröfsern *dividirt*, wird gröfser; z. B. $\frac{7}{3} : \frac{4}{2} = \frac{14}{12}$;

B e w e i s .

Das erstemal wird der Zähler durch *Multiplication* des mehr kleinern Zählers mit dem wenig gröfsern Nenner, und der Nenner durch *Multiplication* des wenig kleinern Nenners mit dem mehr gröfsern Zähler erzeugt; das 2temal wird der Zähler durch *Multiplication* des mehr gröfsern Zählers mit dem wenig kleinern Nenner: der Nenner durch *Multiplication* des wenig gröfsern Nenners mit dem mehr kleinern Zähler erzeugt.

c) Ist ein gröfserer Bruch von einem kleinern, und Ganzen abzuziehen, so wird eine Einheit des Ganzen in einen Bruch gleiches Nenners verändert, und hinzugesetzt; dadurch wird also die Einheit des Ganzen *reduzirt* in die



die Einheiten des Bruchs, — aber diese sind durch den Nenner ausgedrückt,

Anmerkung:

Vergleichung eines Postulats der Addition und Subtraction algebraischer Gröſſen, und der Addition und Subtraction der Brüche.

Bey algebraischen Gröſſen werden die *Coefizienten addirt*, oder *subtrahirt*, wenn die Buchstaben und ihre Exponenten identisch sind, — eben so werden die Bruchszähler addirt, oder subtrahirt, wenn ihre Nenner identisch sind; — Hier ist der Nenner (das Maas) *Divisor*, — und dort ist die Gröſſe mit ihrem Exponenten als Maas betrachtet, *Multiplicator*; — Also bey jeder *Addition* und *Subtraction* muſs Divisor oder Factor gleichnamig seyn, denn in jedem Falle wären widrigenfalls verschiedene Zahlen verschiedenartiger Massen zu addiren, oder subtrahiren.

8.) *Verwandlung eines Bruchs in zusammenhängende Brüche:*

Bey einem unächten Bruche giebt die Division des Zählers durch den Nenner die Ganze — bey einem ächten die Division des Nenners durch den Zähler, wie viel dergleichen Theile des Ganzen noch zum Ganzen fehlen; diese
stellen



nun wieder mit ihrem unterschriebenen Divisor einen Bruch, und so fort einen zusammenhängenden Bruch vor; Es seye $\frac{361}{1495}$ durch die Division des Zählers in den Nenner, und fernere Division des jedesmaligen Restes in den jedesmaligen vorhergehenden *Divi-*

$$\text{for} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}$$

denn, da 361 der 4te Theil von 1495 ist, wenn 51 dazu gesetzt wird, so fragt sich, der wievielte Theil von diesem 4ten ist 51 — Antwort der 7te wenn 4 dazugesetzt wird; nun fragt sich der wievielte Theil dieses 7ten d. i. des 51 ist 4, also dies 4 in 51 dividirt giebt den 12ten Theil nebst 3; der wievielte Theil ist nun 3 von 4 — Antwort, nebst 1 der einste, und 1 in 3 ist der 3te Theil.

II. Dezimalbrüche:

1.) Begriff und Darstellung:

Decimalbruch ist der Quotient der Theilung des in mehrere untergeordnete Zehnteile abgetheilten Zählers eines ächten Bruchs durch seinen Nenner, da aber bey einem unäch-



ächten Brüche vorher durch die Division des Zählers durch den Nenner die Ganzen erhalten werden, so trennt man diese von dem Bruchquotienten durch einen Strich; wegen der allgemeinen Regel aber setzt man bey mangelnden Ganzen an ihre Stelle ein 0.

1. Folge. Also wird bey dieser Theilung (der Rest als 1 oder mehrere Einheiten von dem nächstfolgenden Zehnthelle betrachtet, und so zum Reste ein 0 gesetzt; d. i. mit 10 multiplicirt, also jede Einheit in 10 Theile getheilt; — und dann wird die Division durch den Nenner fortgesetzt, d. i. diese 10 Theile werden gemessen durch denselben Theil eines in gleiche Theile getheilten Ganzen, welcher auch das Maas des ursprünglichen Zählers war.

2.) Folge. Der Dezimalbruch erklärt sich also auch, als eine Reihe von Zählern, von der Rechten gegen die Linke, wobey jedesmal das 10theilige der auf den Zähler folgenden Einheit der Nenner ist.

2.) Durch Multiplication der Decimalen mit 10 rückt das Decimalcomma um eine Stelle weiter nach der Rechten; denn die dem Ganzen zunächst Zehnthelle werden dadurch zu Ganzen, weil jeder zehnte Theil zu einer Ein-



Einheit der vorhergehenden Zehn - Theile wird.

3.) *Berechnung.*

a) Bey der *Addition* und *Subtraction* hat man zu bemerken, daß bey Untereinanderstellung der Decimalstellen der Anfang nicht wie gewöhnlich, sondern von der Linken zur Rechten gemacht wird; denn gar oft ist die Zahl der Decimalstellen in beyden Größen einander ungleich.

b.) Da nur gleichnamiges berechnet werden kann, so muß, wenn ein natürlicher und Dezimalbruch zusammen kommen, 1sterer in einen letzterer Art verwandelt werden.

4.) *Umwandlung ächter Brüchen in Dezimalbrüche:*

Der Zähler als Dividend wird mit 10 multiplicirt, eigentlich aber dadurch zu Zehntheilen reducirt, so muß auch der Quotient zehnthelig werden, weil der Divisor nicht 10 theilig ist, und doch das Product des Divisors und Quotienten gleich seyn muß dem Dividend.



5.) *Verwandlung.*

So wie bey den natürlichen Brüchen wird der Zähler mit der Zahl der Einheiten kleinerer Art multiplicirt und durch den Nenner, also durch 10 getheilt:

VII. A b f h n i t t.

Theorie des Verhältnisses, und der Proportion.

1.) *Verhältniß*

ist die Vergleichung zweyer oder mehrerer Grössen oder Zahlen;

a) *Geometrisches* (Zahlenverhältniß) — durch die Division:

aa) *Steigend* wie oft die vorhergehende in der folgenden —

bb) *Fallend* — wie oft die folgende in oder vorhergehenden enthalten ist;

Der Quotus heisst *Exponent* des Verhältnisses.

b) *arithmetisches* — durch die *Subtraction*: —
Um wie viel die eine grösser als die andere ist;



ist ; es ist ebenfalls *Steigend* oder *Fallend*.
Die *Differenz* ist der *Exponent* des Verhältnisses.

2.) *Proportion,*

Sie ist einer Vergleichung zweyer oder mehrerer Dividenden und Divisoren , oder Minuenden und Subtrahenden , vermöge der Gleichheit zweyer oder mehrerer Quoten oder Differenzen , also vermöge der Gleichheit zweyer Verhältnisse.

1.) *Grund - und Lehrsatz.*

Bey gleichen Quoten oder Differenzen ist das Product der verwechselten Dividenden und Divisoren , oder die Summe der Minuenden und Subtrahenden um gleichoft — oder gleichviel gröfser oder kleiner als das andere ; es wird also durch beyderseitigen Wechsel beyder Glieder zugleich der eine Factor des werden- den Products um so viel gröfser (oder der eine Theil der Summe) , als der eine Factor des andern Products (der eine Theil der andern Summe) kleiner wird ; und zugleich der andere Factor um so viel kleiner , als der zweytere gleichnamige gröfser wird.



2. Grund - und Lehrsatz:

In jeder geometrischen Proportion ist ein Glied eines Verhältnisses mit einem Gliede des andern Verhältnisses multiplicirt

a) ein Kleiners mit einem Größern,

b) ein Größeres mit einem Kleinern:

und durch das andere Glied des andern Verhältnisses dividirt — gleich seinem Nebengliede.

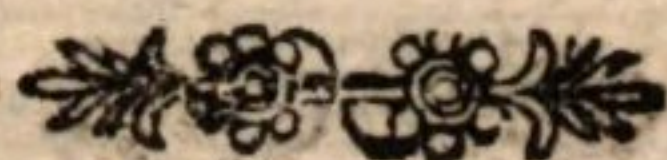
Beweis: Bey gleichen Producten verhält sich ein Factor des einen Products zu einem Factor des andern, wie der andere Factor des andern Products zum 2ten Factor des ersten Products; — Dieß ist der Ansatz und Grund der Probe der Proportion; — und erklärt sich: — denn in der graden Proportion ist das genannte erste Glied oftmal $>$ als das zweyte, so ist das dritte eben so oftmal $>$ als das 4te, als das zweyte $<$ als das erste ist, sonst könnte das Product der äußern Glieder nicht $=$ seyn dem Producte der mittlern; es giebt also das Product des größern und kleinern — dividirt durch ein größeres drittes, das kleinere Nebenglied, — aber dividirt durch ein kleineres dritte, ein größeres Nebenglied.



1.) Folge ; Hieraus — aus a) und b) folgt auch die Regel der verkehrten geometrischen Proportion ; — Es arbeiten z. B. 3 Mann 8 Tage, wie lange brauchen zu derselben Arbeit 6 Mann ; da nun die Mannszahl nicht im graden Verhältnisse zur Tagezahl stehet , und jedes Verhältniß doch nur aus 2 gleichnamigen Gliedern bestehen kann , so wäre der in letzterer Hinsicht zwar richtige — aber verkehrte Ansatz folgender $3 : 6 = 8 : x = 16$; der grade folgender $6 : 3 = 8 : x = 4$, oder $3 : 6 = x : 8 = 4$; — In jedem Falle aber , also ohne Hinsicht des Ansatzes , blos aus obigem Begriffe ein kleineres Glied eines Verhältnisses mit einem größern des andern multiplicirt , oder wechselseitig ; — folgt die richtige Beantwortung der Frage.

Verkehrt ist die geometrische Proportion , wenn einmal das erste durchs zweyte Glied , und das anderemal das zweyte durchs erste Glied dividirt wird :

Folge : Verhalten sich 2 Verhältnisse verkehrt gegeneinander , so ist das Product der äußern Glieder , nicht wie bey der graden Proportion gleich dem Producte der innern Glieder sondern einmal steht der Dividend an der zweyten , das anderemal an der ersten Stelle der 2 Verhältnisse , da er bey der graden Proportion



Proportion, so wie der Divisor seine gleichnamige Stelle behauptet; (damit die bekannten Gröſſen einander folgen, und nicht durch die unbekannte getrennt werden, wird die angegebene Ordnung als allgemein *adoptirt*) so z. B. nach obigem $3 : 6 = 8 : x = 4$ find die 2 Dividendi die innern Glieder, und die Producte 12 und 48 find ungleich; sucht man aber die Producte nach dem ersten Grund- und Lehrsätze, so verwechselt man Dividenten und Divisoren ohne Rücksicht ihre Stelle, und die Functionen der Multiplikation geben die gehörigen Producte.

*) Man kann also, und muß bey jeder Proportion — sie seye grad oder verkehrt — um das vierte Glied zu finden, nur nach obigen 2 Grundsätzen, ohne Rücksicht des Ansatzes der Proportion verfahren.

Anmerkung eines Ansatzes:

- 1.) der graden, — und
- 2.) der verkehrten Proportionsverhältnisse — als Brüche,

und dadurch als Aufklärung einer parallelen Richtigkeit mit der Function



1.) der *Division der Brüche*, weil nemlich der Dividendzähler mit dem Divisorsnenner, und der Dividendsnenner mit dem Divisorszähler multiplicirt wird;

2.) der *Multiplication*, weil Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt wird. — —

1.) das grade Verhältniß $3 : 6 = 8 : 16 = \frac{6}{3} = \frac{16}{8}$; da nun das Product der mittlern Glieder, oder der verwechselten Dividenden und Divisoren 6 und 8 = ist dem Producte der äußern, oder der verwechselten Dividenden und Divisoren 3 und 16; so folgt die obige Function der Division;

2.) Das verkehrte Verhältniß $3 : 6 = 8 : 4 = \frac{6}{3} = \frac{4}{8}$; da nun hier das erste mit dem 3ten Gliede multiplicirt = ist dem 2ten mit dem 4ten multiplicirt; so folgt die obige Function der Multiplication.

Einige Regeln.

a.) Bey grader Proportion $a : b = c : x$ steht die Fragezahl an der 2ten Stelle, die mit ihr gleichnamige an der ersten, und die mit der ersten in Verbindung stehende an der 3ten: die zu findende muß also mit der 3ten gleichnamig seyn, und mit der 2ten in Verbindung ste-



stehen, denn es lassen sich nur gleichnamige Gröſsen vergleichen.

b) Bey verkehrter, und in eine grade umgekehrten Proportion $b : a = c$ steht die Fragezahl an der ersten, die mit ihr gleichnamige an der 2ten, und die mit der 2ten in Verbindung stehende an der 3ten Stelle, es kömmt also die mit der ersten in Verbindung stehende, und mit der 3ten gleichnamige an die 4te Stelle. — Wäre nicht das 2te Glied ein gleichnamiges mit dem ersten, so hätte auch bey einer verkehrten Proportion keine Regelmässige Umkehrung weder des einen, noch des andern Verhältnisses statt. —

Als eine mechanische Regel bey verkehrter Proportion kann gelten; — nachdem man prüfen muſs, ob das 4te Glied $>$ oder $<$ wird als das 3te, so bestimmt man nach diesem Verhältnisse des gröſſern oder kleinern die letzte Proportion : weil nun auch das erste dasselbe grade Verhältniss seyn soll, so macht man es zu demselben; dieſs wäre z. B. bey derselben Arbeit: der erste Ansatz wäre nun $16 : 32 = 8 : x$. Da aber $x < 8$, also soll auch im ersten Verhältnisse das 2te Glied kleiner seyn als das erste; also da $16 : 32 = 8 : x$.

 $>$ $>$

ver-



verkehrt ist, so folgt $32 : 16 = 8 : x = 4$.

>

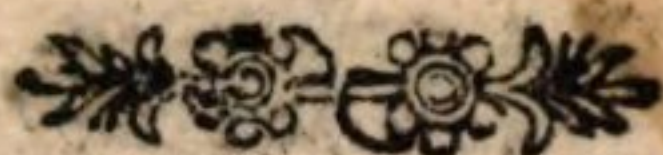
>

— Man könnte zwar auch das >, > zuerst bey dem ersten Verhältnisse anwenden, und das zweyte darnach modificiren, aber weil man ohnehin zuerst nach der Gröfse oder Kleinheit des 4ten Gliedes fragt, so fängt man auch hier mit dem 2ten Verhältnisse an.

2te Folge: Also denkt man sich bey einer Proportion ein Glied eines Verhältnisses als Zähler, das andere als Nenner, so giebt die Multiplication dieses Bruches mit einem Gliede des 2ten Verhältnisses einen Bruch, dessen Werth, d. i. der durch die Division des neuen Zählers durch den Nenner erhaltene Quotient — das andere Glied des 2ten Verhältnisses ist;

Statt dessen

kann man auch den Quotient des einfachen Zählers aus dem Nenner mit dem einen Gliede des 2ten Verhältnisses multipliciren, um das andere zu erhalten; denn hierbey wird der einfache Quotient so oftmal gesetzt, als nach voriger Auflösung der Zähler als Dividend gesetzt war; es bedurfte also auch das 1stemal den Divisor-Nenner in dem mit derselben Gröfse multiplicirten Dividend-Zähler eben so oft als enthalten zu suchen, als im leztern Falle der einfache Quotient — um
den-



denselben Quotienten, wie im ersten Falle zu erhalten, mit jener Gröſſe multiplicirt werden mußte, denn der Quotient ist derselbe, es werde Dividend oder Quotient mit derselben Gröſſe multiplicirt: z. B. $3 : 6 = 8 : 16 \quad \text{oder} \quad 8 \times \frac{6}{3} = 8 \times 2 = 16.$

Anmerkung.

Der Divisor verhält sich zu einem Factor des Dividends, wie der andere Factor zum Quotient, z. B. $24 : 2 = 12 \quad \text{oder} \quad 2 : 3 = 8 : 12$, die Exponenten sind jedesmal $1\frac{1}{2}$. —

Eben so verhält sich der Multiplicator oder das Einfache zu einem Factor des Products, wie der andere Factor zum andern von jenen 2, d. i. zum Multiplicator, oder zum Einfachen.

Jede grade Proportion leidet 4 Haupt- und 8 Nebenveränderungen

bey Untersuchung eines 4ten Gliedes, welches wechselt.

$$\text{Daher } 12 : 24 = 3 : 6 = \frac{24}{12} \times \frac{6}{3}$$

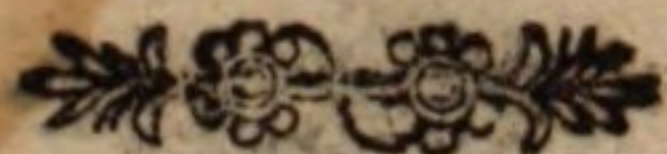
$$1.) \quad \frac{3 \times 24}{6} = 12$$

$$a) \quad 3 \times \frac{24}{6} = 12$$

$$b) \quad \frac{3}{6} \times 24 = 12$$

F

2)



$$2.) \quad 3 \times 42 = 6$$

$$12$$

$$a) \quad 3 \times \frac{24}{12} = 6$$

$$b) \quad \frac{3}{12} \times 24 = 6$$

$$3.) \quad 6 \times 12 = 3$$

$$24$$

$$a) \quad 6 \times \frac{12}{24} = 3$$

$$b) \quad \frac{6}{24} \times 12 = 3$$

$$4.) \quad 6 \times 12 = 24$$

$$3$$

$$a) \quad 6 \times \frac{12}{3} = 24$$

$$b) \quad \frac{6}{3} \times 12 = 24$$

Anmerkung.

Zerlegt man das Product der mittlern Proportionalglieder in Factoren, so steht das erste Glied als Divisor oder Nenner der Regel nach unter dem mit dem ersten gleichnamigen, oder auch unter dem ungleichnamigen Gliede als Zähler.

Grundsätze:

Wenn 2 Gröſſen mit einer 3ten durch irgend eine arithmetische Function verglichen werden, so haben die Resultate das ungeänderte, aber ein verkehrtes Verhältniß gegeneinander, als die ursprünglichen Gröſſen; so z. B. $16 : 36 =$ dem durch die Division in 100 entstandenen Verhältniſſe $2 \frac{7}{9} : 6 \frac{1}{4}$ d. i. $\frac{25}{9} : \frac{25}{4}$ — War also das 2te Glied



Glied anfangs gröfser als das erste, so kömmt, wenn das vierte Glied gröfser als das 3te werden soll, nach der Auflösung der Quotient des ersten als das größere Glied an die 2te Stelle; also wird der Quotient des kleinern mit dem möglichen 3ten Gliede 100 multiplicirt, und durch den Quotient des gröfsern dividirt; — Diefs im Verhältnisse $\frac{25}{9} : \frac{25}{4} = 100$; $\frac{2500}{4} : \frac{25}{9} = \frac{22500}{100} = 225$. — Es soll z. B. zu 100 Mafs 36 kr. — Wein, 16 k. — Wein gemischt werden, und die Mischung 24 kr kosten, wie viel 16 kr. — Wein kömt also dazu? — also $36 : 16 = 100$; da aber 16 kr. mehr Mafs geben, so kann die 4te Stelle nicht wie die 2te ein Divisor, sondern ein Dividend feyn, also verkehrt man es $16 : 36 = 100 : x = 225$: nun setzt man eins von folgenden 2 Verhältnissen an

entweder $24 : 16 = 225 : x$ (welche aus einer ver-
oder $24 : 36 = 100 : x$ kehrten in eine grade
Proportion umgeändert
find.)

Oder auch nach dem *Grundsätze*: Wenn in 2 Proportionen, welche einander gleich, aber unähnlich sind, und deren einer erstes Verhältnifs zum andern ersten Verhältnifs verkehrt sich verhält, das 2tere Glied als das kleinere des ersten Verhältnisses mit dem ersten Gliede des 2ten Verhältnisses in der andern Proportion, — und eben



so, das 2tere Glied des ersten Verhältnisses in der andern Proportion als das grössere mit dem 3ten Gliede der ersten Proportion in Verhältniss setzt, und jedesmal das 2te Verhältniss mit dem vorherig ersten Gliede anfängt, —

$$16 : 100 = 24 : x. = 150.$$

$$36 : 225 = 24 : x.$$

Es seye also $100 = a$, $36 = b$, $16 = c$, $24 = d$, $225 = e$; so ist anfangs

$$d : c = e : x \quad \text{2tens} \quad c : a = d : x$$

$$\text{oder} \quad d : b = a : x \quad \quad b : e = d : x$$

und daher auch $c : a = b : e$, welches wieder verschiedenemal nach der gewöhnlichen Art versetzt, und umgekehrt werden kann; — Diese Proportion lässt sich auch mit umgekehrtem 2ten Verhältnisse finden, wenn man in den 2 Proportionen der ersten Art wegen Identität der ersten und Identität der letztern Glieder die mittlern Glieder in grade Proportion setzt — und in den 2 Proportionen der 2ten Art fand man sie, weil man wegen Identität der ersten und Identität der 2ten Glieder des 2ten Verhältnisses das erste Verhältniss in Proportion setzt mit dem 2ten; — es entstand also das erstemal $c : b = e : a$, welches mit $c : a = b : e$ verglichen beweist, dass die mittlern Glieder im letztern zuerst verwechselt, und dann das 2te Verhältniss umgekehrt ist; — das 2temal $c : a = b : e$. —

Da



Da sich aber die Proportion $16 : 36 = 100 : 225$, in $16 : 100 = 36 : 225$ verwandeln läßt, so soll auch nach der beyderseitigen Division 36 in der gesuchten Zahl der Masse so oft enthalten seyn als 16 in 100, 16 ist in 100 $6\frac{1}{4}$ mal enthalten, das fernere veränderte Verhältniß, also auch die Operation ist oben in unbenannten Zahlen angegeben.

Wenn in obigem Beyspiel $a = 100$, $b = 36$, $c = 19$, $d = 24$ ist, so ist $x =$ dem Quotus aus der Division der Differenz des 36 kr. und 24 kr. Preises durch die Differenz des 24 kr. und 16 kr. Preises, denn $x = a \frac{(b - d)}{d - c} = 150$

Mafs 16 kr. Wein; — Wären aber vom 36ger nur 40 Masse dabey, welches in 100, $2\frac{1}{2}$ mal enthalten ist, so kämen, weil dadurch der Dividendus auch um so viel kleiner würde, auch so viel weniger, also 60 als $2\frac{1}{2}$ mal in 150 enthalten heraus. Wenn aber auch $a = 100$ unbekannt wäre, statt dessen aber 250 als die Summe der Masse des gemischten Weins, so setzt man das $x = a \frac{(b - d)}{d - c}$ proportional an $d - c : b - d = a : x$;

Also auch durch Umkehrung der mittlern Glieder zu äußern, und der äußern zu mittlern, und dann nebst beyderseitiger addition des 2ten Glied-



Gliedes $(d - c) + (b - d) : d - c = a + x : a$; oder auch durch Addition des 2ten Gliedes zum ersten im vorigen graden Ansatz $(d - c) + (b - d) : b - d = a + x : x$; läßt man jetzt die sich aufhebenden Glieder aus, also im ersten Gliede jedesmal $+ d - d$, so entstehen $b - c : d - c = a + x : a$ d. i. $36 - 16 = 24 - 16 = 250$ (als die Mafs - Summe beyder Weinarten) : $a = 100$, denn $\frac{250}{100} = 2\frac{1}{2}$, so wie $36 - 16 = 20 : 2\frac{1}{2}$ und $b - c : b - d = a + x : x$ d. i. $36 - 16 : 36 - 24 = 250 : x = 150$, denn $\frac{250}{150} = 1\frac{2}{3}$, so wie

$$\frac{36 - 16}{36 - 24} = \frac{20}{12} = 1\frac{2}{3}.$$

Letztere Aufgabe läßt sich auch folgendermaßen auflösen $b x + c (a - x) = a d$, also ist $b x - c x = a d - a c$; $x = a \frac{(d - c)}{b - c}$ die Mafse des beffern; und dieß in eine Proportion aufgelöst, wobey das mit dem Nenner - Divisor im ersten Verhältniß gleichnamige Glied der Zähler - Factor ist $b - c : d - c = a : x$, daher $b x - c x = a d - a c$, wie vorhin.

*Anmerkung.*

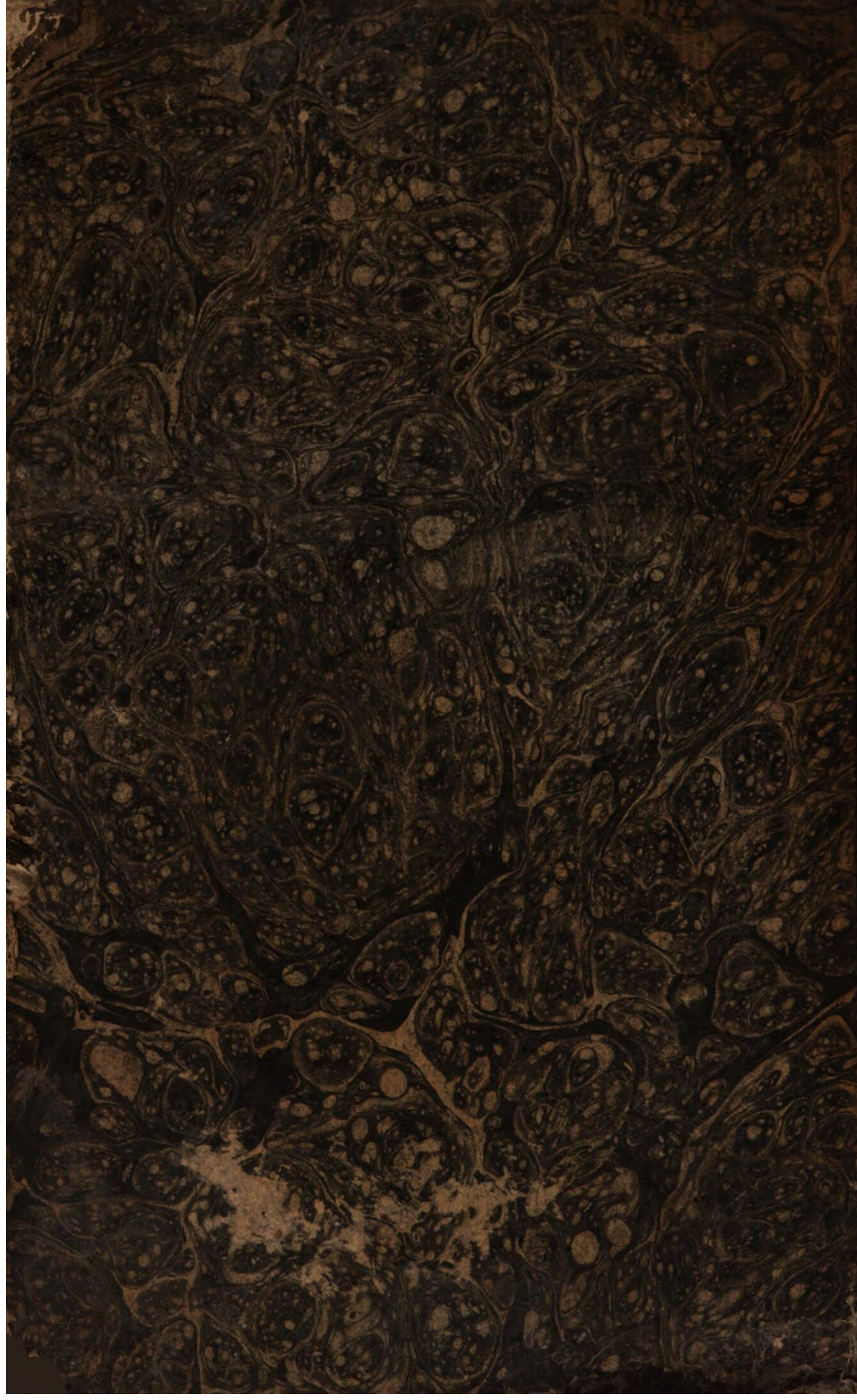
182 Klafter sollen in 26 Tag gearbeitet werden, wie viel in einem Tag? — heißt $26:1 =$
 $182:x = 7$; hier ist $7 = \frac{182}{26} = 182 \times \frac{1}{26} =$
 $\frac{1}{26}$ der ganzen Arbeit.

Answered.

182 Kisten sollen in 25 Tagen geschafft werden.

den, wie viel in einem Tag? — heißt es: $x =$ $182 : x = 7$; hier ist $x = \frac{182}{7} = 26$ — heißt es: $x =$ $\frac{1}{2}$ der ganzen Arbeit.

H



Huhn, Joseph

Einzig möglicher Standpunkt reiner Original-Ideen einer Anfangs-Theorie
der Mathematik in Ergänzungen, Erklärungen und Theils-Systemen Mit Figuren
und einer fast vollständigen Arithmetik

München 1801

Don.Lud. 559

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10728090-5